

ΘΕΜΑ 45

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$.

α) Αν $\lim_{x\rightarrow 0^+}(f^2(x)-4f(x))=-4$, να δείξετε ότι $\lim_{x\rightarrow 0^+}f(x)=2$.

β) Έστω ότι $f^2(x)-4f(x)=x-4$ για κάθε $x\geq 0$ και $f(1)=1$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)=2-\sqrt{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=e^{2-f(x)}+2$ έχει ακριβώς μία λύση.