

ΘΕΜΑ 47

Έστω περριτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

α) Αν η f έχει ελάχιστο στο $x_1 = -1$, να δείξετε ότι έχει μέγιστο στο $x_2 = 1$.

β) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

δ) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$, να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και στο $(1, +\infty)$.

ε) Αξιοποιώντας τις πληροφορίες της άσκησης, να σχεδιάσετε μια συνάρτηση f .

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x-1) - f(1-x))$

ζ) Αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)f(x) + x^2 = 4x - 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.