

ΘΕΜΑ 49

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-2,0)$, $B(4,0)$, $\Gamma(0,3)$ και μόνο σ' αυτά.

α) Να δείξετε ότι $f(2) > 0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5 f(5)f(6) + 3x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4, +\infty)$.

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(10)x^3 - 4x^2 + f(1)}{f(3)x^2 - 5x - 2}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (6,8)$ τέτοιο, ώστε $3f(x_0) = f(6) + f(7) + f(8)$.