

ΘΕΜΑ 50

Έστω περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + \eta\mu\pi x - 1) = 9$.

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -10$.

β) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \pi$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in [-1, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{f(-1) + f(1)}{2}$

γ) Να βρείτε την f αν ισχύει ότι $x^2 f(x) \geq x^5 + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.