

ΘΕΜΑ 51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $x + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (3, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0^2 - x_0$.