

ΘΕΜΑ 57

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(x^2) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt[3]{f^2(x)}}{x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{f(x^2+x)} - e^{f(x^2)} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2 - 4x + 4)}{f(x+2) - f(3x-2)}$

δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)}$ έχει ελάχιστο το 2. Ποια είναι η θέση του ακρότατου;

ε) Αν $h^2(x) - 4h(x) \leq f(x^4) - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η h είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.