

Θέμα 01

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.
- β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 2020$ έχει ακριβώς μια πραγματική λύση.
- γ. Αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x + e^{f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι 1-1, να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.