

Θέμα 1

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)}(e^{f(x)} + 2\eta\mu x) + 1 = e^{2x} + \sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x > 0$ και $f(\pi) = \pi$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - \eta\mu x)$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x - e^\lambda = \eta\mu x$.

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

στ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > \ln\left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \eta\mu x\right)$ για κάθε $x > 0$.