

Θέμα 02

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = -x^2 - x$$

- α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στη C_g .
- β. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε:

$$e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0$$

- γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Να δείξετε ότι:

- i) $h(x) \geq x^2 - x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii) Η εξίσωση: $h(x) = 2009$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.