

Θέμα 03

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Να δείξετε ότι:

α) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$g'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \text{ και } g(0) = -\ln 2 \text{ τότε:}$$

$$f = g$$

β) Η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{1}{e^{x+1} + 1} \leq f(x+1) - f(x) \leq \frac{1}{e^x + 1}$$