

## Θέμα 10

Ένα θέμα που πρέπει να μελετηθεί καλά για να μάθουμε να βρίσκουμε τη καμπυλότητα μιας συνάρτησης  $f$ . Επίσης κάνουμε μια επανάληψη στην εξίσωση της εφαπτομένης. Τέλος μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει το Γ ερώτημα. Αξίζει να το διαβάσετε!

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$  και η  $f''$  είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής συνάρτηση στο  $(\alpha, \beta)$ .

- A.** Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη καμπυλότητα.
- B.** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου  $A(\alpha, \beta)$ , αν είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Γ.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι η μοναδική συνάρτηση για την οποία ισχύει:  
 $f'(x) + f(x) = e^{-x}$  και  $f(0) = -2$ .

Ας δούμε τη λύση και τα όποια σχόλια:

- A.** Έχουμε  $f'(x) = e^{-x}(3-x)$  και  
 $f''(x) = e^{-x}(x-4)$  και η συνάρτηση  $f$  έχει θέση  
 Σ.Κ. στο  $x_0 = 4$ .

|          |                                                                                       |      |                                                                                       |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------|------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$      | $-\infty$                                                                             | 4    | $+\infty$                                                                             |
| $f''(x)$ | -                                                                                     | ο    | +                                                                                     |
| $f(x)$   |  | Σ.Κ. |  |

- B.** Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$  έχει εξίσωση:  $y - \beta = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha)$ ,  $(\epsilon)$   
 η  $(\epsilon)$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν:  $-\beta = -\alpha \cdot f'(\alpha) \Leftrightarrow \beta = \alpha \cdot f'(\alpha) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (\alpha - 2) \cdot e^{-\alpha} = \alpha e^{-\alpha} \cdot (3 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \pm \sqrt{3}$ .

- Γ.** Πράγματι ισχύει:  
 $f'(x) + f(x) = e^{-x} \cdot (3 - x) + (x - 2) \cdot e^{-x} = e^{-x}$  και  $f(0) = -2$ .

Υποθέτουμε ότι υπάρχει άλλη μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g$  με τις ίδιες ιδιότητες δηλαδή:

$$g'(x) + g(x) = e^{-x} \text{ και } g(0) = -2$$

τότε για τη συνάρτηση  $h = f - g$  θα είχαμε:

$$f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x) + h(x) = 0 \Leftrightarrow (h(x) \cdot e^x)' = 0$$

άρα  $h(x) \cdot e^x = c$  και για  $x = 0$ :  $h(0) = c \Leftrightarrow c = 0$

συνεπώς  $h(x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .