

Θέμα 30

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e^x(x - 1) = ae^x - 1 \text{ για τις διάφορες τιμές του } a \in \mathbb{R}$$

γ. Να δείξετε ότι $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$ για κάθε $x > 0$.