

Θέμα 33

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

- $2x^2f'(x) + x^3f''(x) + 1 = 0$ για κάθε $x > 0$,
- έχει ακρότατο στο σημείο $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο A και στη συνέχεια να δείξετε ότι $x^e \leq e^x$ για κάθε $x > 0$.

γ) Αν υπάρχει $a > 0$ για το οποίο ισχύει ότι $x^e \leq a^x$ για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι $a \geq e$.

δ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f έχει τη μικρότερη κλίση.

ε) Να βρείτε αρχική συνάρτηση F της f για την οποία να ισχύει ότι $F(1) = 0$.

στ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.