

Θέμα 35

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + 3f(x) + 1 = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική της παράσταση δέχεται πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2 + 6x}{f(x) + 2x - 4} \qquad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$

γ) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 1$.

Έστω ότι η f είναι συνεχής.

δ) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ε) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Να δείξετε ότι η f δεν μπορεί να έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

ζ) Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

η) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$.

θ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ και να δείξετε ότι είναι παράλληλη στην ασύμπτωτη της στο $+\infty$.

ι) Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο με τετμημένη $x_1 \in (0, 1)$, παράλληλη στην ευθεία

$$y = \frac{1}{2}x + 1821.$$

κ) Να λύσετε την εξίσωση $f^3(\eta \mu x) + 3f(\eta \mu x) = x^3 - 1$.