

Θέμα 36

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$2x^2 f(x) + 4x^3 f'(x) + x^4 f''(x) = -1 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 0, f'(1) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x^{2e} \leq e^{x^2}$ για κάθε $x > 0$.

γ) Αν υπάρχει $\lambda > 0$ για το οποίο ισχύει ότι $x^{2e} \leq \lambda x^2$ για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι $\lambda \geq e$.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x) = |ax - a - x^3 f(x)|$, $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

δ) Να δείξετε ότι $g'(1) = 0$.

ε) Να δείξετε ότι $a = 1$.

στ) Να δείξετε ότι $g(x) = x \ln x - x + 1$.

ζ) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 f(x) = g(x)$.