

Θέμα 37

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $A(1,1)$ και για τις οποίες ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)g(1+h) - f(1+h) - g(1+h) + h^2 + 1}{h^2} = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται εφαπτομένες κάθετες στο A .

β) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xg(x) - 1}{x - 1} = 1 + g'(1)$

γ) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{xf(x)} - e}{x - 1} = e(1 + f'(1))$.

δ) Έστω $f(1+h) = h^2 + 2h + 1$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις εφαπτομένες των C_f, C_g στο A .

ii. Να βρείτε την f .

iii. Αν $g(x) = \frac{\kappa}{x} + \lambda$ να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

iv. Αν $M(\alpha, \beta)$ με $\alpha^2 > \beta$, να δείξετε ότι από το M άγονται δύο εφαπτομένες προς τη C_f .