

Θέμα 38

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $2f'(x) + xf''(x) = -\eta\mu x$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi) = 0$ και $f'(\pi) = -\frac{1}{\pi}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x) - \eta\mu x$ είναι σταθερή.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

γ) Να δείξετε ότι η f έχει κρίσιμο σημείο στο $x_0 = 0$.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

ε) Να δείξετε ότι $f''(0) = -\frac{1}{3}$.

στ) Να δείξετε ότι $f(x) > 1 - \frac{x^2}{6}$ για κάθε $x > 0$.

ζ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.