

Θέμα 39

Έστω μια συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2xf(x)f'(x) - 1 = 0$ για κάθε $x > 1$ και $f(e) = 1$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι θετική και γνησίως αύξουσα.

β. Να βρείτε το τύπο της f .

γ. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$, να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $A(e, 1)$ και να δείξετε ότι:

$$2e\sqrt{\ln x} \leq x + e \quad \text{για κάθε } x > 1.$$