

Θέμα 41

A. Να δείξετε ότι

α. $x^2 > \ln 2x$ για κάθε $x > 0$.

β. $e^{x^2} > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Να λύσετε την εξίσωση $x + e^{-x^2} = 1$.

Γ. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) + e^{-f^2(x)} = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σημείο τομής της C_f με την ευθεία $x = 1$.