

Θέμα 44

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^3(x) + 3f(x) = 3x$$

- α.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη.
- β.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής.
- γ.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- δ.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - x) + x < x^2$.