

Θέμα 45

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$, $0 < x < a$ της γραφικής παράστασης C της f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

A. Ναδειχτεί ότι:

i. Ισχύει $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$

ii. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f''(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία περνά από την αρχή των αξόνων και η C_f να εφάπτεται μια μόνο φορά σε αυτήν.

B. Αν η f έχει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ ναδειχτεί ότι:

i. αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{x} = L$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x-1) - f(x)}{x} = -L$

ii. η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x < 0$ με $f(0) = 0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

C. Αν το σημείο $B(b, f(b))$ ανήκει στην εφαπτομένη της C_f στο $A(a, f(a))$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) \cdot (\xi - a) = f(\xi) - f(a)$