

Θέμα 49

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 4)$ για την οποία ισχύουν:

$$e^{f(x)} = 3f'(x)f''(x) \quad (1) \text{ για κάθε } x < 4, f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x < 4 \text{ και } f(1) = 0, f'(1) = 1$$

- a. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 4)$ να βρείτε το πρόσημο της f και να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα μόνο σημείο.
- b. Να δείξετε ότι $3f''(x) = (f'(x))^2$ και κατόπιν να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty, 4)$
- c. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (0, 1) : \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -x_0 \quad (3)$
- d. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$ για $x < 4$
- e. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f και να δείχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία μόνο λύση στο $(-\infty, 4)$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$
- f. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της f
- g. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f