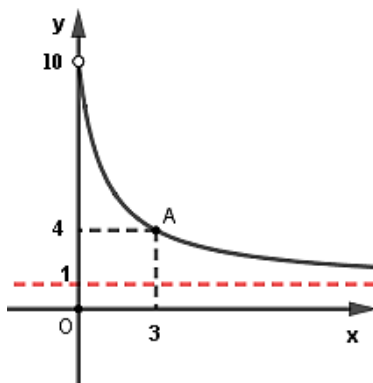


Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$.

ε) Αν η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να δείξετε ότι $2g(5) < g(4) + g(6)$.

στ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x) - 10}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \eta \mu f(x) \right|$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right|$

ζ) Υλικό σημείο M κινείται επί της C_g και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα το δευτερόλεπτο. Αν $f'(3) = e^{-3}$ να βρείτε την ταχύτητα απομάκρυνσής του από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$.