

ΘΕΜΑ 57

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$.

α) Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

β) Για $\alpha = e$,

i. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

iii. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.