

ΘΕΜΑ 58

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 2x + 2$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x (\ln x + 2) = 2(x + 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f'(x^2) > f'(x+1) + f'(x^2+1)$ για κάθε $x > 1$.

δ) Να αποδείξετε $2xf(x) + f(x^2) + 3\ln^2 2 + 6\ln 2 > 2xf(x+1) + f(x^2+1) + 6$ για κάθε $x > 1$.