

ΘΕΜΑ 60

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $4x^3 + 4 \leq f'(x) \leq 4x^3 + 3x^2 + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$ και $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x < f(x) < x^4 + x^3 + 4x$ για κάθε $x > 0$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^4}$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^3 = 2x^4$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα μεγαλύτερη του 1.

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα μεγαλύτερη του -1.