

ΘΕΜΑ 62

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει $f(x)f'(x) = \frac{1}{2} \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{\eta \mu x + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $e^{-g(x)}f(x) - 2xe^{-g(x)} = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $x(2\sqrt{2} - x) \leq e^{g(x)} - e^{g(0)} \leq x(\sqrt{10} - x)$, $x > 0$.

ii. η εξίσωση $e^{g(x)} + x^2 = 2x$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.