

## Θέμα 32

Δίνεται η γνησίως μονότονη και συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 2$ .

- A.**
- i. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
  - ii. Να δείξετε ότι:  $f(-4) = -2$
  - iii. Να δείξετε ότι:  $\int_0^2 f(x)dx = 4 + \int_{-2}^0 f(x)dx$ .
- B.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:
- i. Υπάρχουν τουλάχιστον δυο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$  με τετμημένες στο διάστημα  $(-4,0)$  οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία  $y=x$ .
  - ii.  $2 \leq f(x) \leq 2x+2$  για κάθε  $x \geq 0$ .
  - iii.  $0 \leq \int_{-2}^0 f(x)dx \leq 4$ .