

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\chi\eta\mu\chi = e^x$ συνχ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\chi^2 + 1}{\chi - 2} + \frac{\chi^3 + 1}{\chi - 3} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

Λύση

3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + x^3 - 2x + 1$ και $g(x) = 3x^3 - 5x + 3$, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

Λύση

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $\beta^2 < 3\gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

5. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\delta < 0$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ και $3\alpha + 2\beta + \gamma < 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x + 3e^x + 1 = 0$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

7. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει:
 $g(x) = f(x)(\lambda - x)$, $\lambda > 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν
τουλάχιστον δύο σημεία $A(x_1, g(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ με $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ και
 $x_1 + x_2 = \lambda$ για τα οποία ισχύει: $AB \perp x'x$.

Λύση

8. Δίνονται οι συνεχείς στο $[0,1]$ συναρτήσεις f, g με σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$. Αν
η f είναι γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $(f \circ g)(\xi) = (g \circ f)(\xi) + 2\xi^2 - 1$.

β) Αν $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.

Λύση

9. Εστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(\alpha) + f(\alpha)f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

Λύση

10. Εστω οι συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ συνεχείς, με $f(\alpha) = \alpha$ και $g(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ώστε $\mu f(x_0) + \nu g(x_0) = (\mu + \nu)x_0$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ και είναι ομόσημοι.

Λύση

11. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) = f(1)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{4}\right)$.

Λύση

12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x - 2 = 0$ έχει μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Λύση

13. Θεωρούμε την εξίσωση $\frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{x+1} + \frac{\gamma^2}{x-1} = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

β) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2}$.

Λύση

14. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^7 + x^3 + 1 = 0$, έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Λύση

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$, $\lambda > 0$ και $\kappa + \lambda < -1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Λύση

16. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f(1) = 5$ και $f(2) = -5$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) = 16$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(0, 2)$.

Λύση

17. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$f(x) = (x^2 - x)g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει διαδοχικές ρίζες το 0 και το 1, να αποδείξετε ότι $g(0)g(1) \geq 0$.

Λύση

18. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta < \gamma$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Λύση

19. Εστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ . Αν έχουν την ίδια μέγιστη τιμή στο Δ αλλά σε διαφορετικές θέσεις, να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Λύση

20. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χορδή της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και έχει μήκος $\frac{\beta - \alpha}{2}$.

Λύση

21. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f^2(x) - 3f(x) = x^2 - x + 5$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό
πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Λύση

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
γ) Να βρείτε το πρόσημο της f .

Λύση

23. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 3$ για την οποία ισχύει:
 $f^2(x) - 6f(x) \eta \mu x - 9 \sigma \upsilon \nu^2 x = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Και λίγη δουλειά για το σπίτι...

24. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x - 3, & 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[1, 3]$ και να βρείτε $\rho \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$.

25. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $x^4 + 8x^3 - x^2 + x - 3 = 0$ στο

β) $x \ln x - e^{2x} \sin x = 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) $5x + 1 - 2 \sin x = 0$ στο $(0, \pi)$

δ) $x^6 + 8x^4 + \lambda^2 x^2 + \lambda x = 8$ στο $(-1, 0)$

26. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $\frac{x^{10} + 1}{x - 2} + \frac{x^{20} + 1}{x + 2} = 0$ στο $(-2, 2)$

β) $\frac{x}{\sin x} - \frac{e^x}{\ln x} = 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

27. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε: $\frac{2 \ln x_0}{1 + \sin^2 x_0} = \frac{\sin x_0}{\ln^2 x_0} + 1$.

28. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-2, 0)$, τέτοιο, ώστε: $\xi^4 + 3\xi^3 + 2\xi + 5 = 0$.

29. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$2 \ln x - x < f(x) < \ln^2 x + x$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (e^2 + 1) \ln x - x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(1, e)$.

30. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) - g(x) = 3x$ για κάθε $x \in [-2, 1]$. Αν η C_g διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(1, 1)$, να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα $(-2, 1)$.

31. Εστω η συνάρτηση $g(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$. Αν $\gamma^2 + \beta\gamma + a\gamma < 0$ να αποδείξετε ότι: $\beta^2 > 4a\gamma$.

32. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(f(x)) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

33. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(f(x)) + f(f^2(x)) = 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(-2) = -2$.

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2, 2)$.

β) Αν υπάρχει $\xi < 0$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\xi, \xi^2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

34. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $f(x) = (x^2 - 5x + 6)g(x)$ για κάθε $x \in [2, 3]$. Αν οι αριθμοί 2, 3 είναι διαδοχικές ρίζες της f να αποδείξετε ότι $g(2)g(3) \geq 0$.

35. Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g(\kappa) + g(\lambda) + g(\mu) = 0$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\kappa \neq \lambda \neq \mu$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε x . Να αποδείξετε ότι η g είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}$.

36. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x} - e^x + 4 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 2)$.

37. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x = e^{-2x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, +\infty)$.

38. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ και $g(x) = x^2 + 3x - 1$ τέμνονται σ' ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (1, 2)$.

39. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: $f(\alpha) = g(\beta)$, $f(\beta) = g(\alpha)$ και $f(\alpha) - f(\beta) > 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τέτοιο, ώστε: $f(\xi) = g(\xi) + 1$.

40. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(\alpha) = 2\beta^2$ και $f(\beta) = 2\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 2x_0^2$.

41. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = \frac{5 - 2x_0}{x_0^2 - 5x_0 + 6}.$$

42. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g , συνεχείς στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $10 \leq f(x) \leq 11$ και $12 \leq g(x) \leq 13$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τέτοιο, ώστε: $f(\xi) + g(\xi) = \xi^2 f(\xi) g(\xi)$.

43. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [0, 2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f^2(\xi) = f(\xi) - \xi$.

44. Η αμαξοστοιχία που εκτελεί το δρομολόγιο Αθήνα – Αλεξανδρούπολη, ξεκινά στις 7.00 το πρωί από την Αθήνα και φτάνει στις 5 το απόγευμα στην Αλεξανδρούπολη. Την επόμενη μέρα ξεκινά στις 7.00 το πρωί από την Αλεξανδρούπολη και επιστρέφει στην Αθήνα στις 5 η ώρα το απόγευμα. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της διαδρομής, στο οποίο η αμαξοστοιχία περνά και τις δύο μέρες την ίδια χρονική στιγμή.

45. Δίνεται συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)+f(1)=0$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]$.
46. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, a+1]$ για την οποία ισχύει $f^2(a)+f(a)f(a+1)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a, a+1]$.
47. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\eta\mu x_0) = \eta\mu x_0$.
48. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1,3]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi+2)$.
49. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x - \beta^2 \eta\mu x = \beta^2$, $\beta \neq 0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει το $2\beta^2$.
50. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow [0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2]$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) + \xi^2 = 2f(\xi) + 3$.
51. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x - 1821 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.
52. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μοναδική ρίζα στα αντίστοιχα διαστήματα :
- α) $x^3 + 2x - 4 = 0$ στο $(1,2)$ β) $x^4 + 2x^3 + 3x - 8 = 0$ στο $(1,3)$
γ) $x^3 + \eta\mu x - 1 = 0$ στο $(0,\pi)$ δ) $\epsilon\phi x + 5x - 2 = 0$ στο .
53. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x + 3\sigma\upsilon\eta x = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.
54. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 24x + 3 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(0,3)$.
55. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$, έχει τρεις άνισες ρίζες στο διάστημα $(-1,4)$.
56. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-1) = -2$, $f(0) = 4$ και $f(1) = -4$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - 9 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1,1)$.
57. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο για την οποία ισχύει: $2f^2(x) - 3f(x) = x^2 - x + 4$ για κάθε . Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο .
58. Να βρείτε τη συνεχή στο συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^2(x) = e^{2x}$ για κάθε και $f(0) = 1$.

59. Να βρείτε τις συναρτήσεις f που είναι ορισμένες και συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x) = x^2 + 2f(x)$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f .

61. Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 5$. Να

υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(4)+3)x^2 - 3x + 1}{x+5}$.

62. Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(3) = -5$ και $-1, 4$ δύο διαδοχικές ρίζες της

εξίσωσης $f(x) = 0$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(0)x^3 + 2x + 5}{x^2 + 4}$.

63. Εστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $(0, 2]$ για την οποία ισχύει ότι:

$f(2) < f(0) < 0$ και η f είναι αντιστρέψιμη. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.