Το θεώρημα Bolzano στις παραγώγους

Θ.Bolzano και Θ. Rolle

64. **Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(\alpha)<0$, $f(\alpha)f(\beta)<0$, και $f(\gamma)<0$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, με $\alpha<\beta<\gamma$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f, δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.**

Λύση

65. **Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ και με συνεχή παράγωγο στο $[2,3]$. Επίσης, ισχύουν: $f(3)=f(2)+\dfrac{19}{3}$ και $f'(2)>6$. Να αποδείξετε ότι:**

α) Υπάρχει $x_0\in(2,3)$, τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=x_0^2$.

β) Υπάρχει $\rho\in(2,3)$, τέτοιο, ώστε $f'(\rho)=3\rho$.

Λύση

66. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Θ.Bolzano και Θ.Μ.Τ

67. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ με $f(-2)=2$ και $f(2)=6$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 4 - x_0$.

β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2,2)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

Λύση

.

68. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $\left[1,e\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(1,e\right)$, με $f\left(1\right)=3$ και $f\left(e\right)=e+2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(1,e\right)$, με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια, ώστε: $f'\left(\xi_1\right)f'\left(\xi_2\right)=1$.

Λύση

.

69. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\left[\alpha,\beta\right]$ με $f\left(\alpha\right)f\left(\beta\right)<0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια, ώστε: $f'\left(\xi_1\right)f'\left(\xi_2\right)>0$.

Λύση

70. **Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)\neq f(\beta)$.**

Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\beta-\xi}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\left(\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right)^2$.

Λύση

71. Δίνεται συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ για την οποία ισχύει ότι:
$f(x-1)-f(x+1)=(x^2-1)e^{x^2}+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0$.

Λύση

Θ.Bolzano και οι συνέπειες του Θ.Μ.Τ

72. Εστω οι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g ,για τις οποίες ισχύει ότι: $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=g(0)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)-g(x)=cx$, $c\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1,ρ_2 τότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$.

Λύση

.

73. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι
$xf'(x)-f(x)=x^2e^x$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=e+1$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-e^x$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

β) $f(x)=x(e^x+1)$, $x>0$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

Θ.Bolzano και μονοτονία συνάρτησης

74. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $2<f''(x)<4e^{2x}$ για κάθε $x>0$, $f'(0)=0$ και $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $x^2+1<f(x)<e^{2x}$ για κάθε $x>0$.

β) Υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)+\ln x_0=0$

Λύση

.

75. **Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=f'(\beta)=\beta$ με $1<\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι**

α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\beta]$.

β) $f(x)>\beta x-\beta^2+\alpha$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Λύση

76. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+x^3+20x^2-28=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση

.

77. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $e^{f(x)}-4x-4e^{-f(x)}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

78. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $f(0)=1$, $f'(0)=2$ και $f(x)f''(x)>(f'(x))^2$ για κάθε $x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge e^{2x}$ για κάθε $x\ge 0$.

Λύση

79. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,3]$. Αν $f(1)=-3$ και $f'(x)>4$ για κάθε $x\in(1,3)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,3)$.

80. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $2x<f'(x)<e^x$ για κάθε $x>0$ και $f(0)=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+2<f(x)<e^x+1$ για κάθε $x>0$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Λύση

Θ.Bolzano και ακρότατα συνάρτησης

81. **Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$.**

Λύση

82. α) Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,4]$ με $f(3)>f(4)>f(1)>f(2)$, να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.
β) Αν η είναι συνεχής στο $[1,4]$ και $f(1)>f(3)>f(2)>f(4)$, να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

Λύση

83. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $g(x)=x$ και $h(x)=\ln x$, $x>0$. Μια κατακόρυφη ευθεία $x=\alpha$, $\alpha>0$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των f, h στα σημεία A,B αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>g(x)>h(x)$ για κάθε $x>0$.
β) Να ρβρείτε την απόσταση $AB=d(\alpha)$.
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha_0\in(0,1)$ στο οποίο η απόσταση d γίνεται ελάχιστη.

Λύση

84. Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1}-2$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωση του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t=8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t =10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$)

Λύση

85. Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Λύση

86. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ με $f(1)=3$, $f(5)=4$ και σύνολο τιμών το $[-1,6]$.Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1,x_2 \in (1,5)$ $x_1 \neq x_2$ τέτοιες ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Υπάρχει $\xi \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

γ) Υπάρχει $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)\left[f'(x_0)+f^3(x_0)\right]=x_0$.

δ) Η ευθεία $y=-x+6$ τέμνει τη C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $\rho \in (1,5)$.

Λύση

Θ.Bolzano και κυρτότητα συνάρτησης

87. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(x^2+x+1)f''(x)+xe^{f(x)}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Λύση

.

88. **Δίνεται παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = \lambda$.**

α) Αν $f(\rho) > \lambda\rho + \beta$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει με την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ κοινά σημεία.

β) Αν $f(\rho) < \lambda\rho + \beta$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ έχουν δύο τουλάχιστον κοινά σημεία.

Λύση

89. Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\left(\alpha,\beta\right)$. Αν ισχύει $f\left(\alpha\right)=f\left(\beta\right)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in\left(\alpha,\beta\right)$, $\delta\in\left(\alpha,\beta\right)$ έτσι ώστε $f\left(\gamma\right)f\left(\delta\right)<0$, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f\left(x\right)=0$ στο διάστημα $\left(\alpha,\beta\right)$.

β) Υπάρχουν σημεία ξ_1, $\xi_2\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοια ώστε $f''\left(\xi_1\right)<0$ και $f''\left(\xi_2\right)>0$.

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Λύση

Θ.Bolzano και De l' Hospital

90. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x$, $0 < \alpha < \frac{1}{e}$, τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ ακριβώς σε δύο σημεία, των οποίων οι τετμημένες βρίσκονται στα διαστήματα $(1, e)$ και $(e, +\infty)$.

Λύση

Θ.Bolzano και ασύμπτωτες

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

γ) Εστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)}, & x>0 \\ k, & x=0 \end{cases}$.

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

ii. Αν $k=-\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,e)$.

Λύση

Και λίγη δουλειά για το σπίτι...

92. Εστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $f(3)<0<f(4)$ και $f(5)f(4)<0$. Να αποδείξτε ότι η C_f έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

93. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία ρίζα στο $(1,2)$.

α) $x^3=2-3\ln x$ β) $x^4+x^3=30-20x^2$

94. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5+x^3+x=\kappa^2(\lambda-x)+\lambda^2(\mu-x)+\mu^2(\kappa-x)$, $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}^*$, έχει μόνο μία πραγματική ρίζα.

95. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ένα προς ένα (1-1) στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\dfrac{e^{f(f(x))}}{e^{f(x)}}=e^{g(f(x))}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η g έχει δύο ετερόσημες ρίζες $\rho_1<\rho_2$, τότε:

α) i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)-g(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2).

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχεί σημείο $A(\xi,f(\xi))$ με $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στο Α να είναι παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

96. Εστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ με $f(3)<f(1)<f(2)<f(0)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,3)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)<0$, $f'(\xi_2)>0$ και $f'(\xi_3)<0$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

97. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, για την οποία ισχύει $f(1)=4$ και $f(2)=1$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε, $f(x_0)=3x_0-2$.

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=9$.

98. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=2\alpha$ και $f(\beta)=2\beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x-y+1=0$.

β) Αν $\alpha>0$, υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η εξίσωση $f(x)=\alpha+\beta$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (α,β).

δ) Υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\rho_1<\rho_2<\beta$ τέτοια, ώστε: $\dfrac{1}{f'(\rho_1)}+\dfrac{1}{f'(\rho_2)}=1$.

99. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία $y=3$ τέμνει τη C_f σ΄ ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

β) Υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

γ) Υπάρχει $x_2\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $y=2x+1821$.

100. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x-\text{συν}x$ έχει μοναδική ρίζα x_0 στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(x_0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-x_0\right)f'(\xi)$

γ) Να αποδείξετε ότι: i) $f'(\xi)>\frac{3}{2}$ ii) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<x_0<\frac{\pi}{4}$

101. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^\nu+\ln x=-1,\ \nu\in\mathbb{N}^*$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

102. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι: $15x+\left[f'(x)\right]^2=5x^2$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ και $f'(5)<0$. Αν η f' είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(3,+\infty)$.

β) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3,+\infty)$.

103. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,e]\to(0,1)$, με $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(1,e)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x(1-\ln x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

104. **α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-1-\text{ημ}2x$, $x\in\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση $x^3+2x-1=\text{ημ}2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

105. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ για την οποία ισχύει : $f(1)=-1$ και $f'(x)>1$ για κάθε $x\in(1,2)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

106. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+2f(x)+3x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να βρείτε το $f(1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)+3=\rho\cdot 4^{\rho}$

107.α) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,8]$ με $f(2)>f(0)>f(8)>f(6)$, να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

β) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,8]$ και $f(8)>f(2)>f(6)>f(0)$,να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

108. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in\mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $f'(x_0)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

109. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,2]$, με $f(0)=f(2)=1$ και $f(1)=4$. Αν το $x_0=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$,να αποδείξετε ότι:

α) η f δεν έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,1)$.

β) Αν η f' είναι συνεχής, να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

110. Δίνεται μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f^3(x)+f(x)=8x^3-12x^2+8x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Αν για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(g(x)-3x)=f(x^2+2)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο.

111. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με σύνολο τιμών το $[-5,5]$ και $f(0)=1$, $f(2)=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β) υπάρχει $\rho\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho)=e^{\rho}f(\rho)$.

γ) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)f''(\xi_2)<0$.

112. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, όπου η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,6]$ και το $x_0=3$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $(2,3)$.

ii. $f'(6)+3f'(2)<0$

iii. $3f''(3)>f'(6)$

β) Αν $f'(6)>0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,3)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi)e^{\xi}-f'(\xi+3)\ln\xi=f'(\xi)\ln\xi-f'(\xi+3)e^{\xi}$

113. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f(x)-2x\ge f(2)+f(-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2)-f(-2)=4$

β) υπάρχει $x_0\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=f(-2)+3$.

γ) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-2,2)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.

δ) υπάρχει $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=1$.

ε) η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ρίζες.

114.α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta>0$ τέτοιο, ώστε $\ln\theta+\theta-2=0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-1)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)+\frac{(\theta-1)^2}{\theta}\ge 0$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi>\theta$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)+f'(\xi)=0$

115. Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση f με πραγματικούς συντελεστές, για την οποία γνωρίζουμε ότι: $f(0)>0$, $f(1)<0$, $f(2)>0$ και $f''(x)\ne 0$ για κάθε $x\in[0,2]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $(0,2)$.

β) Η f είναι κυρτή στο $[0,2]$.

γ) $f(x)\ge f'(0)x+f(0)$.

116. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν οι συναρτήσεις f και f' είναι κυρτές και η f έχει ακρότατο στο $x_0=0$ με τιμή 0, να αποδείξετε ότι:

α) $f(-2)+f(2)>0$ **β)** $f'(-2)+f'(2)>0$ **γ)** $f'(1)>f''(0)$

δ) υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=x_0^2-4$.

ε) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4\in(-2,2)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+f''(\xi_3)+f''(\xi_4)>0$.

117. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$, $\alpha>0$ με $\alpha\ne 1$.

α) Αν $f(x)\ge 1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

β) Για $\alpha=e$,

i. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

iii. αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

118. Δίνεται συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με σύνολο τιμών το $[1,10]$, $f(0)=2$ και $f(1)=7$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν διαφορετικά $x_1, x_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_1)=0$.

γ) υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_2)+f'(\xi_2)=0$.

δ) η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία ε: $y=15x-6$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

119. Δίνεται συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[\alpha,\alpha+1]$. Αν $f(\alpha)=\alpha+1$, $f(\alpha+1)=\alpha+2$ και $f'(\alpha)=\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\alpha+1]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) η ευθεία $x-2y+\alpha+2=0$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.

γ) $f(x)\geq \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\alpha+1$ για κάθε $x\in[\alpha,\alpha+1]$.

δ) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)>\frac{1}{2}$.

ε) η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία ε: $y=-3x+4\alpha+2$ ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα $(\alpha,\alpha+1)$.

120. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x-1$ και $h(x)=-x^2-x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $O(0,0)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της h.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\rho\in(-1,0)$ για το οποίο ισχύει: $e^{\rho}+2\rho+1=0$.

γ) Εστω $g(x)=f(x)-h(x)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $g(x)\geq \rho^2-\rho-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. η εξίσωση $g(x)=1821$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.