

Το θεώρημα Bolzano στα ολοκληρώματα

121. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = -4f'(2x-1)$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(1) = 0$ και $f(1) = \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{-1}^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx = 2$

β) υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + f(2\xi-1) = e - 2\xi$.

Λύση

122. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,3]$ με $\int_1^3 f(x) dx = 0$, για την οποία υπάρχει

$x_0 \in [1,3]$ με $f(x_0) \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$.

β) Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ και ισχύει $f(1) = f(3) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ τέτοια, ώστε $f''(x_1)f''(x_2) \leq 0$.

Λύση