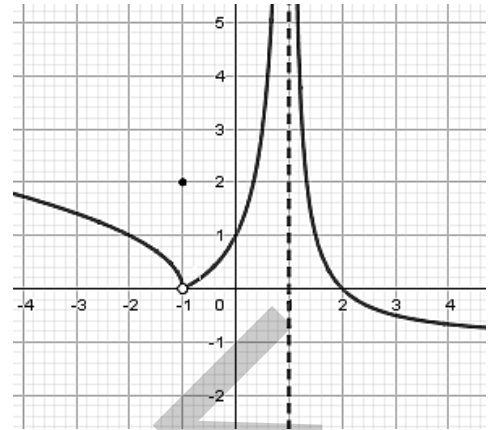


Φυλλάδιο Ασκήσεων πάνω σε Γραφικές Παραστάσεις

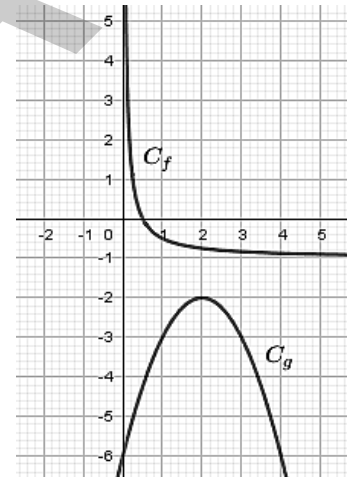
1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) & \beta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{f(x)} \\ \gamma) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)}{x+2} & \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(1-\sqrt{x})}{x-1} \\ \epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \left[f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right] & \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) - 3f(x) + 1|}{|1 - f^2(x)| + 5f(x)} \\ \zeta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln|x-2|}{f^2(x)} & \eta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x)-1) \eta\mu \frac{1}{x} \right] \\ \theta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - f(-1)}{f(x) - 1} & \iota) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - 1}{f^2(x) - 1} \end{array}$$



2. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g . Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{|f(x)|} & \beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)g(x)] \\ \gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)+6}{f(x)} & \delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} [(g(x)+6) \cdot \eta\mu f(x)] \\ \epsilon) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x-2)}{g(x)+2} \end{array}$$



3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

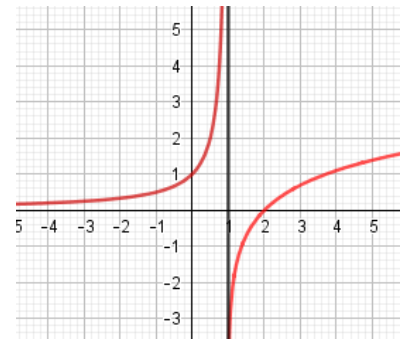
A. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} & \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|f(x)|} \\ \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right) & \delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \eta\mu f(x) \right) \end{array}$$

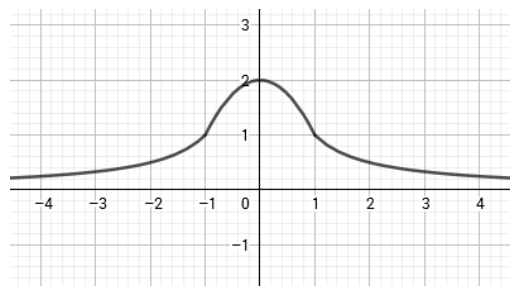
B. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f^3(x) + f(x)$, $x < 1$.

- α) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να βρείτε για $x < 1$ το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f^3(x) + f(x) = 1821$.

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = 3x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα μεγαλύτερη από το 1.



4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^3(x) + f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geq 6$.

- β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)+3}-2}{f^2(x)-1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-3}{f(x)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f^2(x)-8|-4}{f^3(x)-8}$

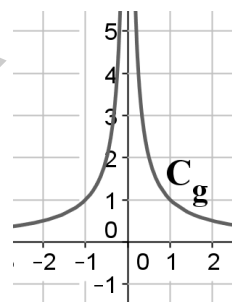
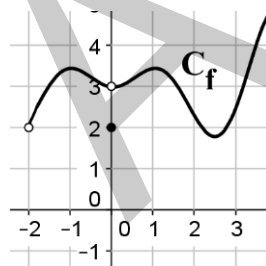
- γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) + f(x) = 8x$ έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x^4) - f^3(x^2) < f(x^2) - f(x^4)$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα. Επίσης δίνεται η συνάρτηση φ με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(ax)}{x} + \beta, & x < 0 \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{g(u)}, & x = 0 \\ h(x), & x > 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}, \text{όπου}$$

$$h(x) = \frac{x^2 + (\gamma - 1)x + \delta + 2}{x}, x \neq 0, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$



- A.α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g .

- β) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$ συναρτήσεων των α και β .

- γ) Να βρείτε το $\varphi(0)$.

Αν $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και η συνάρτηση φ είναι συνεχής, να βρείτε :

- B.α) τους πραγματικούς αριθμούς α, β .

- β) τους πραγματικούς αριθμούς γ, δ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, το οποίο και να βρείτε.

- γ) τον τύπο της φ .

- δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ και $\alpha(x) = -x - 2\pi$ τέμνονται σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη αρνητική και μεγαλύτερη του -2π .

6. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x^2 - 6$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 β) Να δείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x_0 = 0$.
 γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2, 2)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0.$$

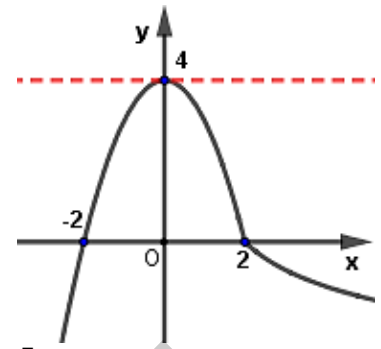
- δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 4}{\eta \mu x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)e^{g(x)}]$

- ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) + x + 3 = f(x) + x^4 - 6x^3 + 10x^2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(3, 4)$.



7. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

- β) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

- δ) Αν η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να

δείξετε ότι $2g(5) < g(4) + g(6)$.

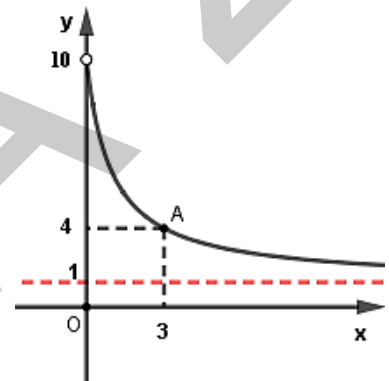
- ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x) - 10}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{f(x)} \eta \mu f(x) \right]$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right]$

- στ) Υλικό σημείο M κινείται επί της C_g και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα το δευτερόλεπτο. Αν $f'(3) = e^{-3}$ να βρείτε την ταχύτητα απομάκρυνσής του από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$.



8. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x + 1$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

- β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 2018$.

- γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.

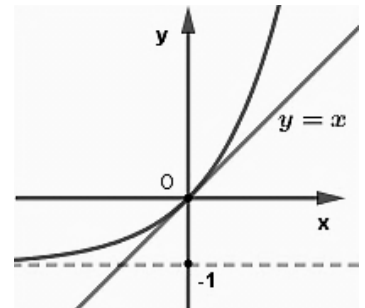
- δ) Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

- ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f(x) + e^x - f(x) - 1}{2x}$ και

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f^2(x) - f(x)} + f(x))$

- στ) Υλικό σημείο M κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασής του από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(0, f(0))$.



9. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και συνάρτηση

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \frac{f(x) - e^x}{x} \text{ και } g'(1) = 2e, \text{ της οποίας η}$$

γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x) - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{f(x) - e}$

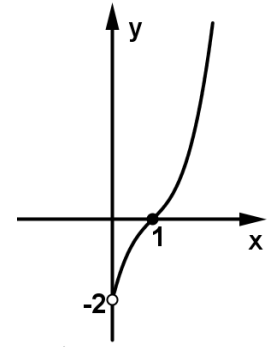
β) Αφού δείξετε ότι $f(1) = e$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

γ) Αν $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι $\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) < \beta e^\alpha - \alpha e^\beta$.

δ) Να δείξετε υπάρχει $\xi \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 9$.



10. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f στο διάστημα $[-1, 5]$.

α) i. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και να βρείτε τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της.

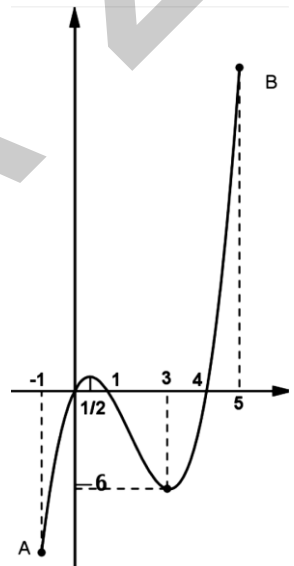
ii. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των σημείων καμπής της.

β) Έστω ότι η f , είναι πολώνυμο τετάρτου βαθμού.

i. Να βρείτε την f' και να σχεδιάσετε την υπόλοιπη γραφική της παράσταση.

ii. Να βρείτε την f , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $f(0) = 1$.

iii. Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f .



11. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές

παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο.

Από την γραφική παράσταση της f' η οποία φαίνεται στο διπλανό σχήμα να απαντήσετε τα επόμενα ερωτήματα αν ισχύουν

• $f(-2) = -2, f(-1) = 0, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$

• $E_1 = 6, E_2 = 1$ και $E_3 = 2$.

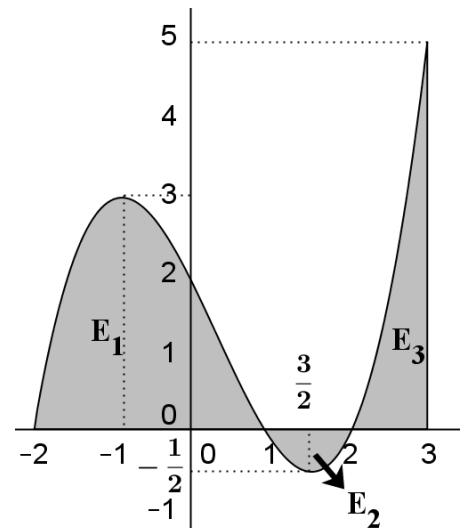
α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

δ) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \alpha$

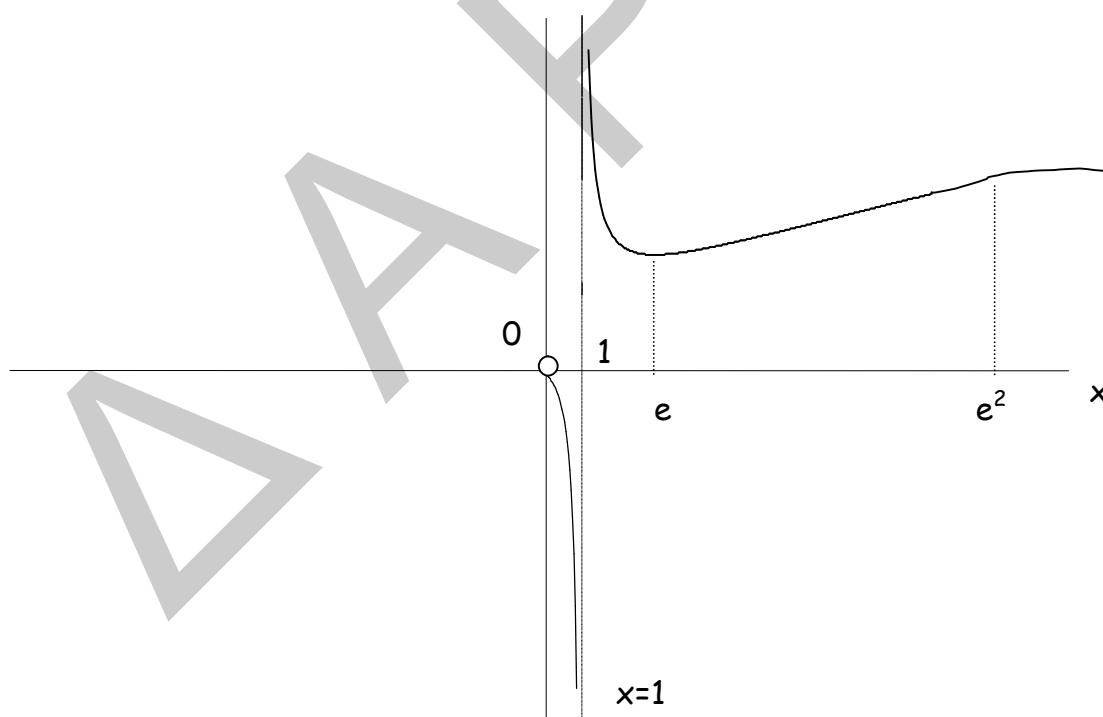


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

ΔΑΡΑΣ

Η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω:



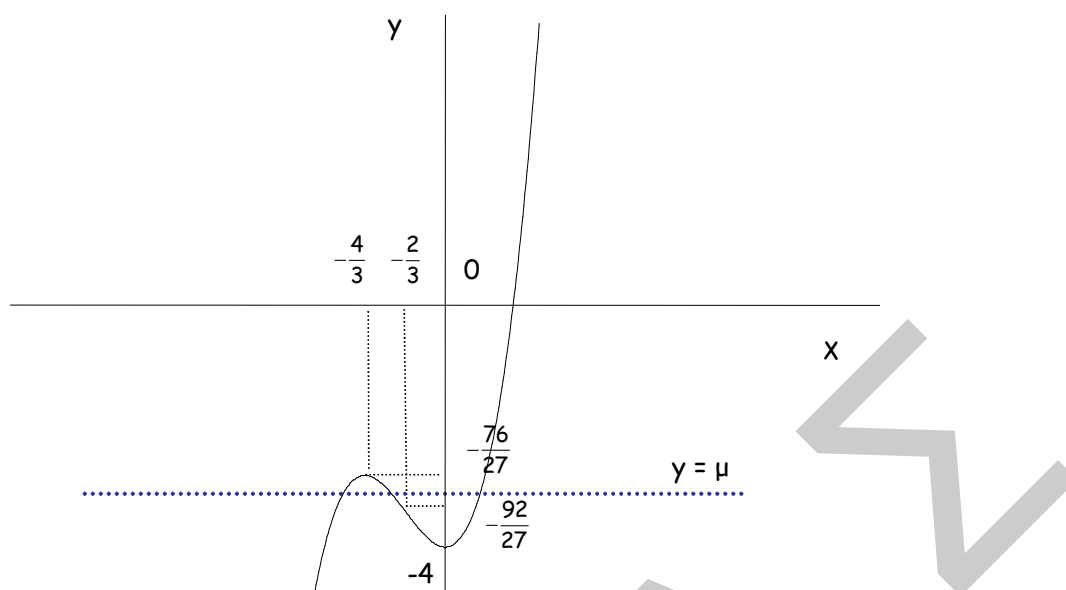
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ και με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης να βρεθεί πότε η εξίσωση $x^3 + 2x^2 - 4 = \mu$ έχει όλες τις πραγματικές της ρίζες.

ΔΑΡΑΣ

ΔΑΡΑΣ

Η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω:



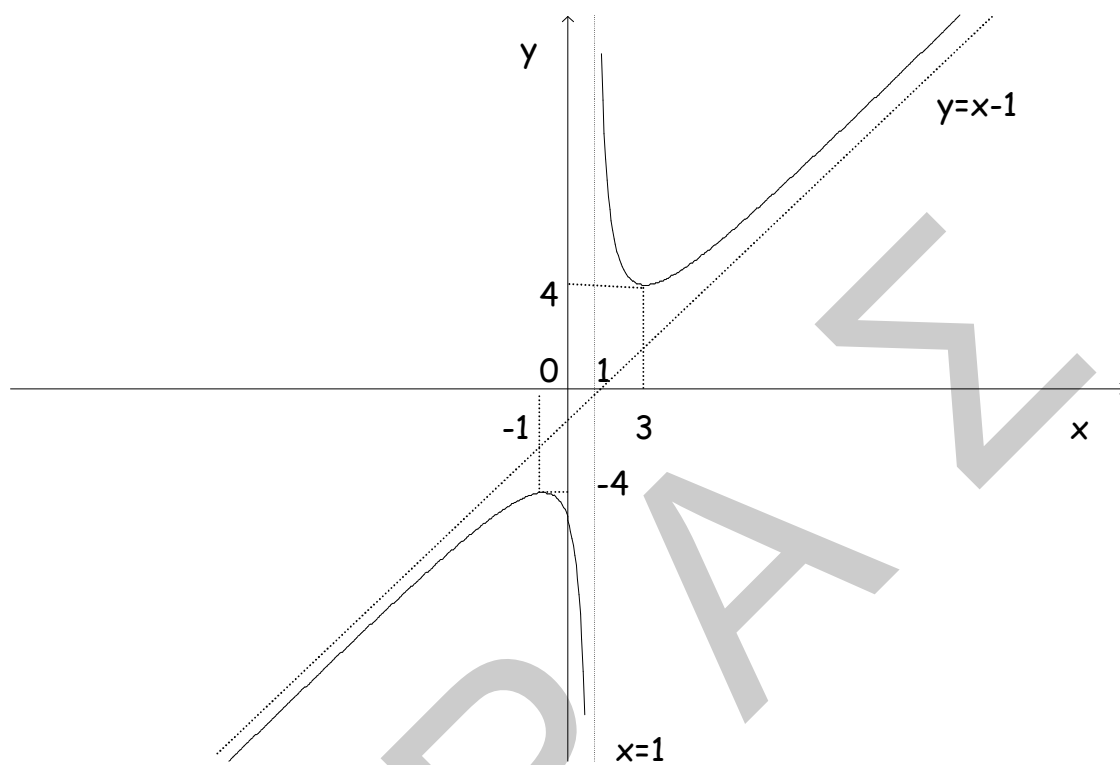
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

ΔΑΡΑΣ

ΔΑΡΑΣ

Η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

β) $f(x) = x^4 - 8x^2$

2. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

β) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

3. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = x + \frac{4}{x}$

β) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

γ) $f(x) = x + \frac{9}{x}$.

4. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$

β) $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$.

5. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

β) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

γ) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

δ) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

ε) $f(x) = \ln x - x + 1$

στ) $f(x) = xe^x$

ζ) $f(x) = \frac{1+x\ln x}{x}$

η) $f(x) = (x+1) \cdot (\ln x + 1)$

θ) $f(x) = x^2 - 2\ln x$

ι) $f(x) = \ln(\eta\mu x), x \in (0, \pi)$.

6. Ομοίως οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, \pi]$

β) $f(x) = \sigma\phi x, x \in (0, \pi)$

γ) $f(x) = \epsilon\phi x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

δ) $f(x) = x + \sigma\upsilon\nu x, x \in [-\pi, \pi]$

ε) $f(x) = \eta\mu^3 x - 3\eta\mu x, x \in [0, \pi]$

στ) $f(x) = 2x + \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$

7. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ και το $A(1, -1)$ να είναι σημείο καμπής της C_f . Στη συνέχεια να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f .

8. Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ και η C_f να διέρχεται απ' το σημείο $A(-1, -\frac{5}{2})$.

Στη συνέχεια να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f .

9. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^3 + (1 - \lambda)x^2 - x + 1 = 0$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{2ax} - \ln x + \ln a$, $a > 0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - a^2 = 2ax(\ln x - \ln a)$.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f .

δ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

ε) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της C_f .

στ) Αν $0 < a < b$, να αποδειχθεί ότι $\ln \frac{a}{b} > \frac{a^2 - b^2}{2ab}$.