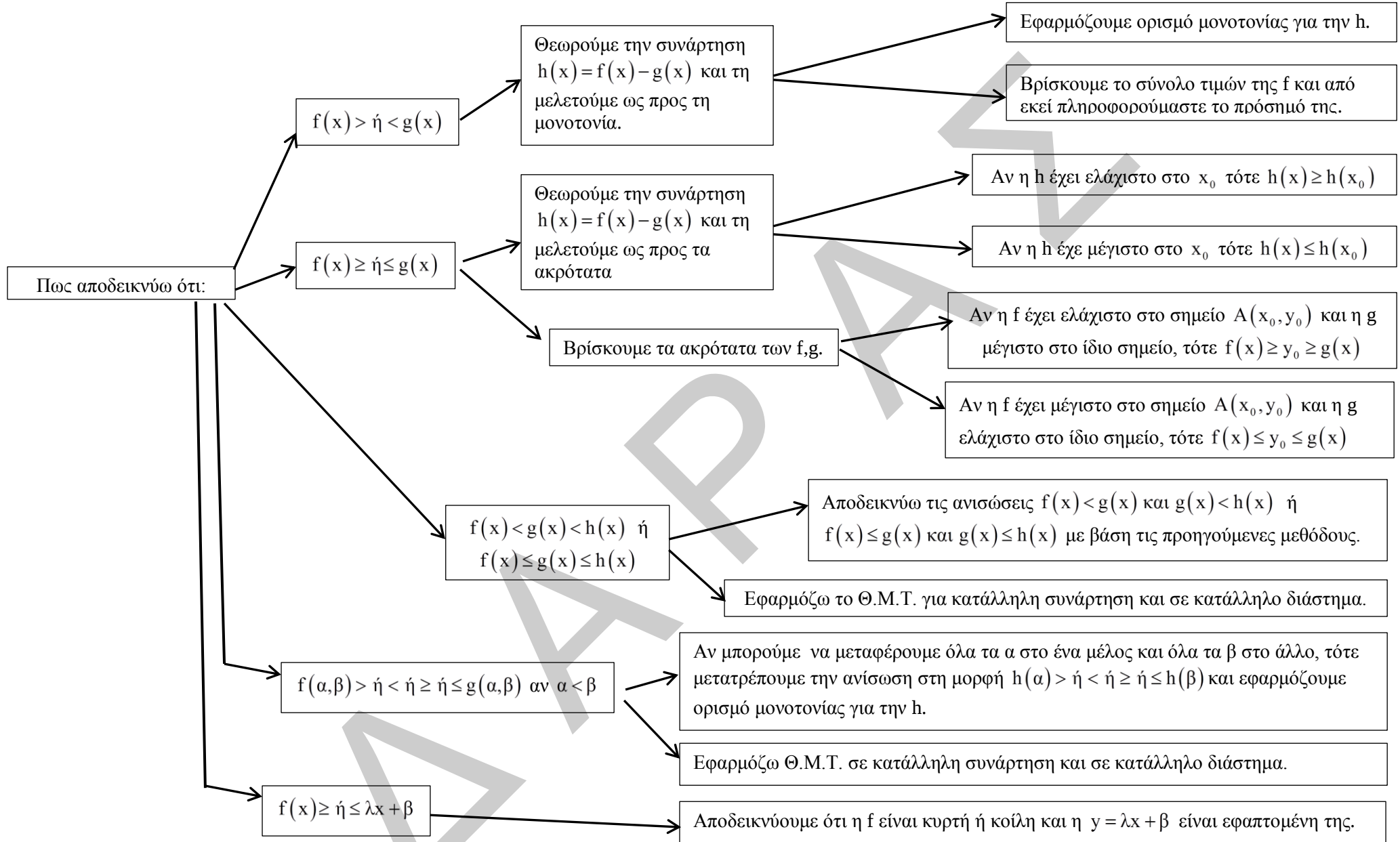




Αν έχουμε **δεδομένη** μια ανίσωση της μορφής $f(x) \geq \text{ή} \leq g(x)$ και αναζητούμε μια σχέση ισότητας, τότε: Θεωρούμε την $h(x) = f(x) - g(x)$. Βρίσκουμε προφανή ρίζα x_0 της h και η ανίσωση γίνεται $h(x) \geq \text{ή} \leq h(x_0)$, οπότε η h παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 . Αν το x_0 βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της h και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dots$

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x-3) < x-4$ για κάθε $x > 4$.

2. Να αποδείξετε ότι: $x \ln^2 x + 2x + 2 > 2x \ln x + e^{-x}$ για κάθε $x > 0$.

3. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $x^x \geq e^{x-1}$, $x > 0$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 3x + 1$ και $g(x) = \ln x - x + 1$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f, g .

β) Να αποδείξετε ότι $e^{x-1} - \ln x + x^2 - 2x \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

5. Να αποδείξετε ότι $x + 1 \leq e^x \leq xe^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Να αποδείξετε ότι $e^{-\alpha} - e^{-\beta} + e^{-2\alpha} - e^{-2\beta} - (\alpha - \beta) > 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

7. Δίνεται παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $\ln x + \gamma x^2 + x \geq \gamma + 1$, να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$.

8. Να αποδείξετε ότι $\ln x - e^{1-x} \leq 2x - 3$ για κάθε $x > 0$.