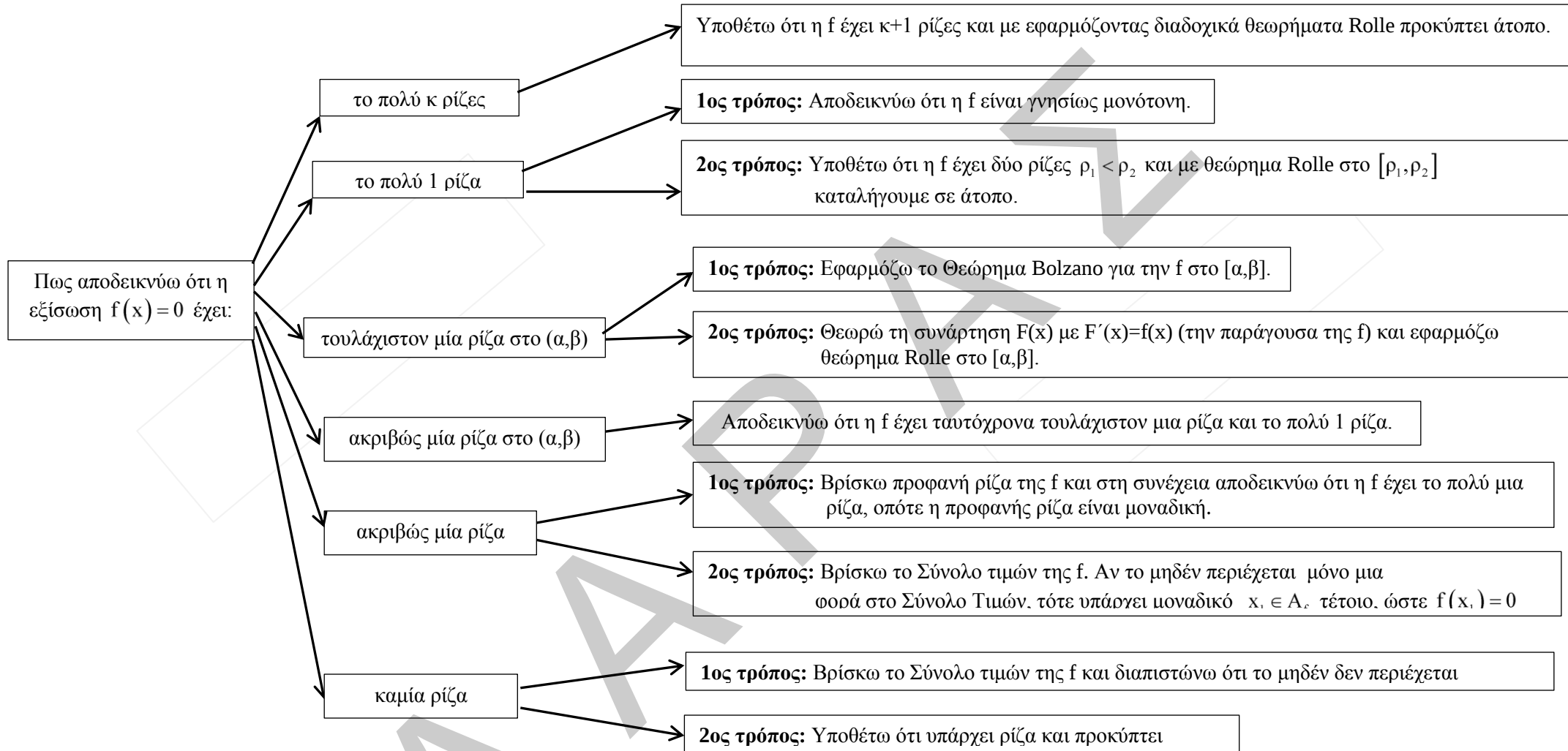


Εξισώσεις

ΔΑΡΑΣ

Οι εξισώσεις στα θέματα των
πανελλαδικών εξετάσεων

Εξισώσεις



Πως βρίσκω το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$;

Πως Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0$;

Το πολύ κ ρίζες

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 6x^2 = x + 1$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Το πολύ 1 ρίζα

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + \frac{x^3}{3} = 6$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β)

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x \ln x = e^x \sin x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $4x^3 + 3\kappa x^2 + 3\lambda = 9x^2 + 6\kappa x + 2\lambda x$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 3)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

α) Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

β) Για $\alpha = e$,

1) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

2) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

3) αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

Πανελλαδικές 2009

Μοναδική ρίζα στο (α, β)

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + x^3 + 20x^2 - 28 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

8. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \beta^2 < 3\gamma.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

9. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,3]$. Αν $f(1) = -3$ και $f'(x) > 4$ για κάθε $x \in (1,3)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,3)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(\frac{-\pi}{2}e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2017

Μοναδική ρίζα

11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 1 = \frac{x^2}{2} + x$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln^2 x = 2x \ln x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, +\infty)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
 β) Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .
 γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Επαναληπτικές Πανελλαδικές 2018

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τομών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα

Πανελλαδικές 2015

Καμία ρίζα

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

Πανελλαδικές 2018

16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Πανελλαδικές 2019

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda + 1)x^2 + x + 1] - \ln(x + 2)$, $x > -1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq 1$.

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Έστω ότι $\lambda = -1$

1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

2) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha \neq 0$.

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2009

Πλήθος ριζών

18. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $6x^2 + 2 = x^3 + 9x$.

19. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x^2 + 5x + 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 .

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2015

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

Πανελλαδικές 2012

ΔΑΡΑΣ

22. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $xf(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία λύση.

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2012

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

δ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2010

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του a .

Πανελλαδικές 2008

Λύση εξίσωσης

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^{4x} + e^x = 2$

β) $e^{x^3+18} - e^{2x^2+9x} = 9x - x^3 + 2x^2 - 18$

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \ln x$, $g(x) = x^x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

27. α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.}$$

γ) Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

δ) Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος γ, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x) \text{ όταν } x \in [0, +\infty).$$

Πανελλαδικές 2016

ΔΑΡΑΣ

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

Πανελλαδικές 2017

ΔΑΡΑΣ

ΔΑΡΑΣ

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) i) Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

Επαναληπτικές Πανελλαδικές 2014

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$.

Πανελλαδικές 2010