

ΑΦΙΕΡΩΜΑ: Ολοκληρώματα

1. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε να ισχύει : $\int_{\alpha}^3 (3x^2 - \alpha x) dx = 14$.
- 2) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0) = \frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε την παράσταση : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{f(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \upsilon \nu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx$.
- 3) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ , ώστε να ισχύει : $\int_2^{\kappa} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 4} dx - \int_{\kappa}^2 \frac{9 - x^2}{x^2 + 4} dx = 12$
- 4) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ , ώστε να ισχύει : $\int_1^3 \frac{e^x + x^3 - x}{x^2 + 1} dx = \int_3^1 \kappa dx + \int_3^1 \frac{x^3 + 3x - e^x}{x^2 + 1} dx$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

- 5) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^2 f(t) \sigma \upsilon \nu x dt \right) dx = 2$.
- Να βρείτε τα ολοκληρώματα :
- $\int_1^2 f(t) dt$
 - $\int_{-2}^0 \left(\int_1^2 3t^2 f(x) dx \right) dt$
- 6) Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Αν ισχύει ότι : $\int_1^2 t^2 \left(\int_1^2 f(x) dx \right) dt = 14$, τότε να βρείτε το $\int_1^2 f(x) dx$
 - Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^3 g(x) dx = 2$, τότε να βρείτε το : $\int_0^3 \left(\int_1^2 f(t) g(x) dt \right) dx$
- 7) Αν ισχύει ότι $\int_4^5 f(x) dx = 4$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_1^3 \left(\int_4^5 x f(t) dt \right) dx$
- 8) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x) f(y) dy \right) dx - 6 \int_0^1 f(x) dx = -9$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα :
- $\int_0^1 f(x) dx$
 - $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^1 f(t) \sigma \upsilon \nu 3x dt \right) dx$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

- 9) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$
- 10) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) = 12x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .
- 11) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) = 9x^2 - \int_{-1}^1 2xf(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

- 12) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει : $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\pi, f(\pi))$ έχει εξίσωση : $2x - \pi y - \pi = 0$. Να βρείτε :
- τις τιμές $f(\pi), f'(\pi)$ και $f(0)$
 - το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi x f''(x) dx$
- 13) Έστω F μια παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 F(x) dx$. **(Ολοκλήρωμα Παράγουσας F)**
- 14) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1) = 5$ και $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 x f'(x) dx$
- 15) Έστω οι συναρτήσεις f, g , με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι :
- $$I = \int_\alpha^\beta (f(x)g''(x) - f''(x)g(x)) dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta)).$$
- 16) Έστω F μια παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 F(x) dx$.

17) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $A(1,2)$ και $B(3,9)$ τέμνονται στο σημείο $\Gamma(4,11)$. Να βρείτε :

- i. τις τιμές $f'(1), f'(3)$ ii. το ολοκλήρωμα : $\int_1^3 xf''(x)dx$

18) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει :

$\int_1^3 \int_0^2 xf(t)dt dx = 12$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ έχει εξίσωση : $2x - y - 3 = 0$. Να υπολογίσετε :

- i. τις τιμές $f(2), f'(2)$ ii. το $\int_0^2 f(x)dx$ iii. το $\int_0^2 x^2 f''(x)dx$

19) Δίνεται το ολοκλήρωμα : $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \ln x^3 dx$ με $\lambda > 0$

- i. Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$.

20) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

21) Δίνεται το ολοκλήρωμα : $I(\lambda) = \int_1^{\lambda} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{x^2} \right) dx$ με $\lambda > 1$

- i. Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

22) Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_{\nu} = \int_0^1 x^{\nu} \cdot e^x dx$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$.

- i. Να αποδείξετε ότι $I_{\nu} = e - \nu \cdot I_{\nu-1}$ για κάθε $\nu \geq 2$.
ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 xe^x dx$ και $\int_0^1 x^4 e^x dx$

23) Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_{\nu} = \int_0^{\pi} x^{\nu} \cdot \sin x dx$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$.

- i. Να αποδείξετε ότι $I_{\nu} = -\nu \pi^{\nu-1} - \nu(\nu-1)I_{\nu-2}$ για κάθε $\nu \geq 4$.
ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} x^5 \cdot \sin x dx$

24) Αν $I_{\nu} = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2} dt$, $\nu \in \mathbb{N}$,

- i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_{\nu} + I_{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$
ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2 .

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΡΤΙΑΣ – ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

25) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

- Αν η f είναι περιττή, τότε να δείξετε ότι ισχύει : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $\int_{-1}^1 \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{1+x\eta\mu x} dx$

26) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

- Αν η f είναι άρτια, τότε να δείξετε ότι ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{-1}^1 \frac{x\sigma\upsilon\nu x + e^{|x|}}{1+e^{|x|}} dx$

27) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_{-1}^1 \frac{x}{2+\sigma\upsilon\nu x} dx$ ii. $\int_{-2}^2 \frac{x^{15}\eta\mu^2 x}{2+\sigma\upsilon\nu x} dx$

28) Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 2x - 5$. Να βρείτε :

- τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$
- την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $N(-1, f(-1))$
- το ολοκλήρωμα : $I = \int_{-1}^1 (f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + x \cdot f''(x)) dx$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

29) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο : $f(x) = x^3 + x + 1$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της .
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^3 f^{-1}(x) dx$.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο : $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της .
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^6 f^{-1}(x) dx$.

31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, με $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε το πεδίο ορισμού της .
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$.

32) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :
 $f^3(x) + f(x) + 2 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\int_0^4 f(x) dx$.

33) Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e}) = 2$ και :

$$xf'(x) \ln x + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

- Να βρείτε τον τύπο της f
- Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx + \int_1^{\frac{1}{2}} e^x dx$

34) Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x^2}$

- Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x+e^{x^2}} dx + \int_1^e \frac{1}{1+x+\sqrt{\ln x}} dx$.

35) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(2, 5)$ και ισχύει :

$$\int_0^2 xf''(x) dx = 0$$

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B .
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_{-1}^5 \left(\frac{1}{3} f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f^{-1}(x) \right) dx.$$

36) Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x) = x - \ln x + e^x$, με $x \in (1, +\infty)$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$
- Να βρεθούν τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2005$ έχει μοναδική λύση στο $(1, +\infty)$
- Έστω $\Pi = \int_2^e f(x) dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi - 2 \ln 2$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΣΧΕΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

- 37) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) + f(6 - x) = 3$ για κάθε $x \in [1, 5]$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^5 f(x) dx$.
- 38) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2 - x) + f(x - 3) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 f(x) dx$.
- 39) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) + f(-x) = x^2 \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.
- 40) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2 - x) + f(x + 2) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^4 f(x) dx$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Στα ολοκληρώματα ισχύουν οι παρακάτω ανισοτικές σχέσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

(αν η f δεν είναι παντού 0 τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Αν $f(x) \geq g(x)$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

(αν η f, g δεν είναι ίσες τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

Απόδειξη :

Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $[a, \beta]$. Τότε ισχύει ότι : $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

Οπότε : $\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx$ δηλαδή : $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

Για να αποδείξουμε ανισότητες στα ολοκληρώματα, συχνά χρησιμοποιούμε :

➤ Τις βασικές ανισότητες :

- $f^2(x) \geq 0$
- $|\eta\mu x| \leq |x|$
- $\ln x \leq x - 1, x > 0$
- $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$

➤ Τις ανισότητες $\min f \leq f(x) \leq \max f, x \in [\alpha, \beta]$

➤ Τις ανισότητες που προκύπτουν από τη μονοτονία της f και τις σχέσεις $\alpha \leq x \leq \beta$

➤ Τις ανισότητες που προκύπτουν από το Θ.Μ.Τ. και τη μονοτονία της f'

➤ Την ανισότητα που προκύπτει από την κυρτότητα μιας συνάρτησης και την εφαπτομένη της σε ένα σημείο.

41) Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2) = 1$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9)dx > 0$

ii. $\int_1^3 f^2(x)dx > 4\int_1^3 f(x)dx - 8$.

42) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii. $\int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx > 4$

43) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) \cdot e^x dx > \frac{27}{8}$.

44) Να αποδείξετε ότι :

i. Να αποδείξετε ότι $\ln(1 + x^2) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \ln(1 + x^2)dx < \frac{1}{3}$

45) Να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx \geq 1$.

46) Έστω η συνάρτηση $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \leq 1 - \frac{1}{e}$

47) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f(x)dx = 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x) - 2f(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

ii. $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 1$

48) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f^2(x)dx = 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x) - 2f(x)e^x + e^{2x} \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

ii. $\int_0^1 e^x f(x)dx \leq \frac{e^2 + 1}{4}$

49) Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{e^x}{x^2 + 1} \geq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ ii. $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 (x^2 + 1)dx$

50 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = 2 - e^{-x^2}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (2 - e^{-x^2})dx \geq 2$

51) Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{e^x}{x^2+1} \geq 1$ για κάθε

ii. $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 (x^2+1) dx$

52) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = 2 - e^{-x^2}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (2 - e^{-x^2}) dx \geq 2$

53) Δίνεται η συνάρτηση $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονotonία

ii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο $[1, 2]$

iii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_1^2 \frac{x-1}{x+2} dx \leq \frac{1}{4}$

54) Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = \ln(1+x^2)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονotonία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^2) dx \leq \ln 2$

55) Να αποδείξετε ότι $1 \leq \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx \leq \sqrt{2}$

56) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\sin x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ και

ii. $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta \mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$.

57) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και

ii. $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x} dx \leq 1$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!: Αν $f(x) \geq 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε : $f(x) = 0$

Απόδειξη :

Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0) \neq 0$. Τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geq 0$, προκύπτει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ που είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) = 0$.

58) Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $f : [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_1^3 f^2(x)dx = 6 \int_1^3 xf(x)dx - 78. \text{ Να βρείτε :}$$

i. $\int_1^3 9x^2 dx$

ii. τον τύπο της f .

59) Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx. \text{ Να αποδείξετε ότι } f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

60) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-vx}$, $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

i. Να μελετήσετε την f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

ii. Να αποδείξετε ότι $2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^2 x e^{-vx} dx \leq e$ (1993)

61) Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγισιμη, με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii. $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$. (1997)

62) Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1,4]$

i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t) dt$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt$, $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t \in [1,4]$ και $x > 0$.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ (1999)

63) Να δείξετε ότι $\int_e^x \frac{\ln x}{\ln t} dt > x - e \ln x$, για κάθε $x > e$.