

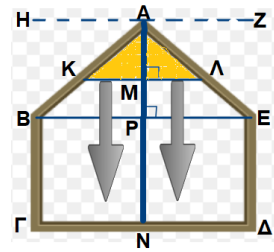
Διαφόρων ειδών προβλήματα

1. Δυο εταιρείες E1 και E2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία E1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η E2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.

- α)** Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:
- i.** Τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)
 - ii.** Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία E1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό. (Μονάδες 2)
 - iii.** Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε; (Μονάδες 2)
- β)** Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 3)
- γ)** Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό; (Μονάδες 6)
- δ)** Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E1; (Μονάδες 6)

ΔΑΡΑΣ

2. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο ΒΓΔΕ και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ. Είναι $AP = 0,8 \text{ m}$, $BE = 1,6 \text{ m}$, $AM = x \text{ m}$, $BΓ = 1 \text{ m}$. Το ορατό κάτω μέρος ΚΛ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση ΗΖ, με σταθερό ρυθμό, ώστε το Μ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΝ (με $AM \neq 0$). Αν $E = E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό E , ισχύει

$$E(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases}, \text{ σε } \text{m}^2.$$

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x , όταν $x = \frac{4}{5} \text{ m}$, είναι ίσος με

$$E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} \text{ m}^2 / \text{m}.$$

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t , τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \frac{4}{5} \text{ m}$, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0,08 \text{ m/s}$ για κάθε $t \geq 0$.

(Μονάδες 08)

ΔΑΡΑΣ

3. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

(Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό M ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec .

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου OAM , όπου

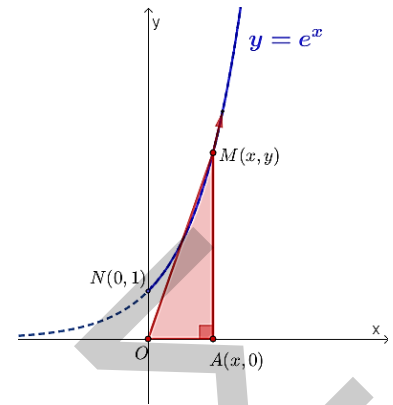
$O(0,0)$, $A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$.

(Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι

$3e^2\text{cm}^2/\text{sec}$.

(Μονάδες 10)



ΔΑΡΑΣ

4. Η συνάρτηση $x(t) = (t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού A, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό A είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό A κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διένυσε το κινητό A. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού A, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του

A ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το A στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 06)

ΔΑΡΑΣ

5. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους y που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι

ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό

0,1m / sec . (Μονάδες 05)

ΔΑΡΑΣ

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α) i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB .

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0 .

(Μονάδες 02)

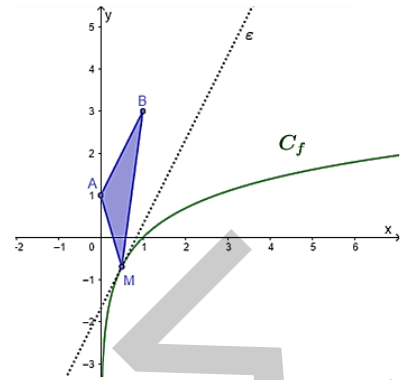
β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - \ln x)$, $x > 0$ η συνάρτηση που

εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM , όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A .

(Μονάδες 07)



ΔΑΡΑΣ

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon : y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε , είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} |x_0 - \ln x_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon : y = x$, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} (x_0 - \ln x_0)$. (Μονάδες 05)

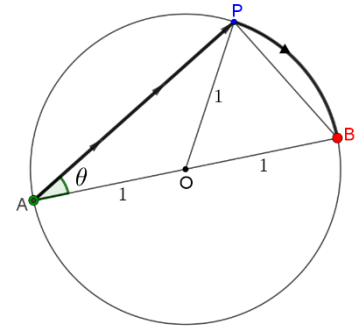
β) i. Να βρείτε το σημείο της C , το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε . (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

ΔΑΡΑΣ

8. Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο A μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο B της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα 3 Km/h και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα 6 Km/h.



Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $\widehat{PAB}$ είναι θ rad.

α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sin\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το A στο B είναι

$$f(\theta) = \frac{1}{3}(2\sin\theta + \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος.

(Μονάδες 10)

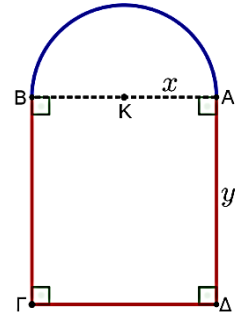
γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right]$.

(Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία x rad σε κύκλο ακτίνας R , είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) $\times$ (ταχύτητα).

ΔΑΡΑΣ

9. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με 4π , αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x \text{ m}$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(AD) = y \text{ m}$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$, με

$$x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right).$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου.

(Μονάδες 9)

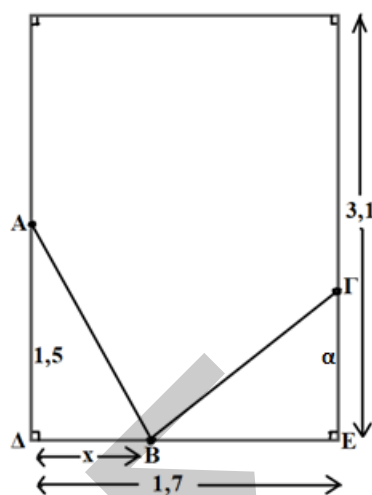
γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να

υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)}$.

(Μονάδες 8)

ΔΑΡΑΣ

10. Ένα γαλλικό μπυλιάρδο έχει μήκος 3,1 μέτρα και πλάτος 1,7 μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο A, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο B και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\Delta B = x$, $\Delta E = 1,7$, $\Delta \Delta = 1,5$, $\Gamma E = \alpha$ και $L = AB + B\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.



α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}$,

$$x \in \left(0, \frac{17}{10}\right). \quad (\text{Μονάδες } 07)$$

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το B απέχει 1,02 μέτρα από το Δ.

i. Αν $L'(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2,25}} - \sqrt{\frac{(1,7 - x)^2}{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ να δείξετε

ότι $\alpha = 1$. (Μονάδες 10)

ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1,02} \frac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

(Μονάδες 08)

ΔΑΡΑΣ

11. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y και να βρείτε τις

συντεταγμένες των κορυφών B , Γ , Δ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με τη βοήθεια της τετμημένης a , $a > 0$ του σημείου $A(a, 0)$. (Μονάδες 6)

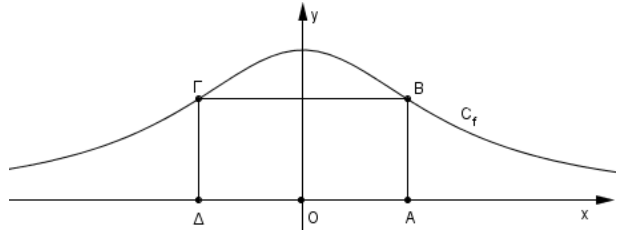
γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(a)$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο

$E(a) = \frac{2a}{a^2 + 1}$, $a > 0$. Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του a το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2}$.

(Μονάδες 6)



ΔΑΡΑΣ

12. Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = \alpha x e^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta \in (0, 1)$ και $\alpha \in (1, +\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y ; (Μονάδες 9)

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά. (Μονάδες 7)

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f . Να αποδείξετε ότι

$$F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1 + \beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}. \quad (\text{Μονάδες 9})$$

ΔΑΡΑΣ

13. Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση $T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι

$T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$.

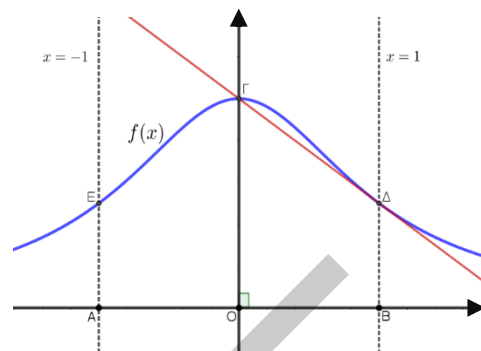
(Μονάδες 10)

ΔΑΡΑΣ

14. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και οι

ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ. (Μονάδες 8)



ΔΑΡΑΣ

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο

$A\left(a, -\frac{a^3}{3}\right)$ με $a < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A .
(Μονάδες 06)

β) i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$

πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $a'(t) = -a(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 .

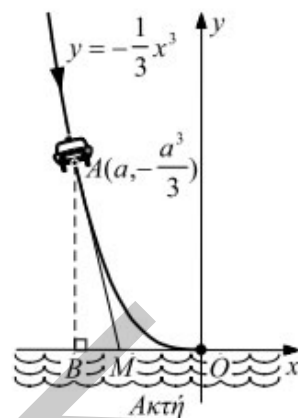
(Μονάδες 08)

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M .

(Μονάδες 02)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3 .

(Μονάδες 09)



ΔΑΡΑΣ

16. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

Οι κορυφές $A(x, 0)$ και $\Delta(-x, 0)$ είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $\Gamma(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του $x \in [0, 3]$ δίνεται από την συνάρτηση

$$E(x) = 18x - 2x^3. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία.

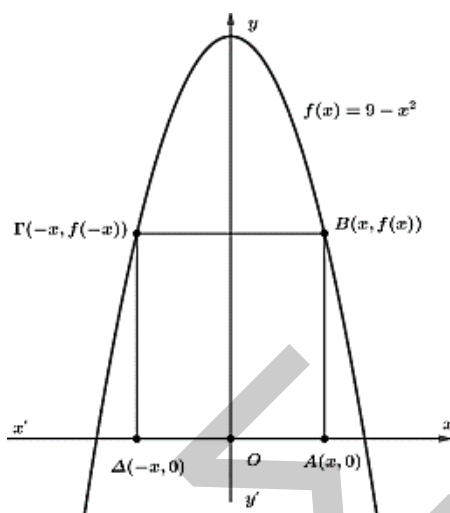
(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του.

(Μονάδες 7)



ΔΑΡΑΣ

17. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[-3,2]$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f , η C_f που στο διάστημα $(-1,2]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f , αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

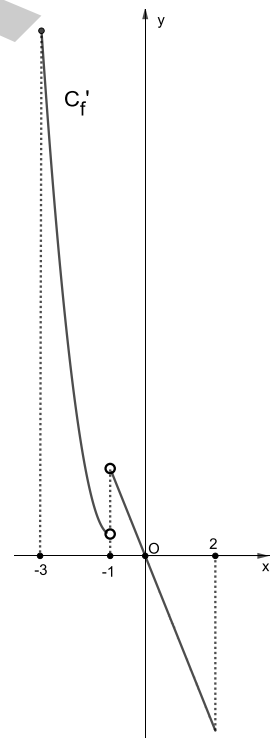
(Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.

(Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x) dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$.

(Μονάδες 06)



ΔΑΡΑΣ

18. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x}$ με

$x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Ζ.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x , το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$h(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 2$ και $x = 1$, είναι $\ln \sqrt{2}e - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

ΔΑΡΑΣ

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f . (Μονάδες 9)

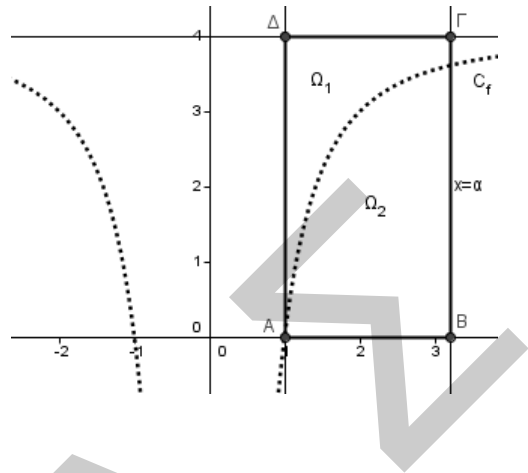
β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$. (Μονάδες 6)

γ) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=a$, $a>1$ και $y=4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2 .

i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του a , τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του a ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$. (Μονάδες 5)



ΔΑΡΑΣ

20. Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2, 2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$.

(Μονάδες 6)

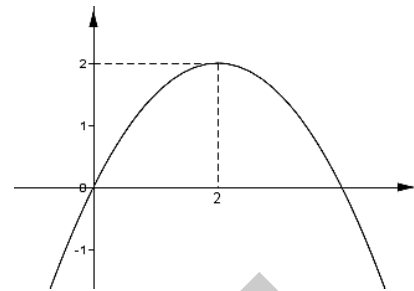
Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$.

(Μονάδες 5)



ΔΑΡΑΣ