

Ρυθμός Μεταβολής

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x > 1$ και ένα σημείο της $K(k, f(k))$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ , της γραφικής παράστασης της f στο σημείο K καθώς και το σημείο A που η ϵ τέμνει τον άξονα $x'x$. $A(k \ln k + k, 0)$
- β) Αν η τετμημένη του σημείου K απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $2k \text{ cm/sec}$, τότε:
- i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του A τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $k = e$. $6e$
- ii. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_0 δίνεται από τη σχέση $\theta'(t_0) = \frac{6}{e} \sin^2 \theta(t_0)$. $\theta'(t_0) = \frac{6}{e} \sin^2 \theta(t_0)$.
2. Σημείο κινείται στην παραβολή $y = 2x^2$, $x > 0$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 3 cm/sec .
- A) Τη στιγμή που η απόσταση OM του σημείου από την αρχή των αξόνων είναι $\sqrt{68} \text{ cm}$ να βρείτε:
- α) το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του. 24
- β) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις δύο πλευρές του στους άξονες και διαγώνιο OM . 72
- γ) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \angle MOx$
- B) Το σημείο όπου οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του M είναι ίσοι.
3. Δίνεται η παραβολή $y = 1 - x^2$ και το σημείο της $M(x_0, y_0)$, $0 \leq x_0 \leq 1$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο M τέμνει τους άξονες στα A και B . Αν, καθώς κινείται το M , το A κινείται στον Ox με ταχύτητα $v_A = 3 \text{ m/sec}$, να βρείτε:
- α) Την ταχύτητα με την οποία κινείται το B στον Oy όταν $x_0 = \frac{1}{2}$.
- β) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB όταν $x_0 = \frac{1}{2}$.
- γ) το εμβαδό του τριγώνου OAB τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M είναι διπλάσιος από την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του.
4. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x > 0$. Ένα σημείο M κινείται στη C_f και έστω K η προβολή του στον άξονα $x'x$. Αν το K απομακρύνεται από την αρχή O των αξόνων με ταχύτητα 3 cm/sec , τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι 2 , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:
- α) της απόστασης KM β) της απόστασης OM γ) της γωνίας $\theta = \angle MOK$
- δ) της απόστασης OE , όπου E είναι το σημείο τομής τυχαίας εφαπτομένης της C_f με τον άξονα $x'x$.

5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(3x-5)-1}{x-2} = 12$.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $f(1) = 1$ ii. $f'(1) = 4$

β) Εστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Εστω σημείο Σ που κινείται στην (ε) με τετμημένη μεγαλύτερη από το 1, της οποίας η ταχύτητα είναι $\frac{3}{4} \text{ cm/sec}$. Να βρείτε:

- i. Το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Σ .
- ii. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAS .

6. Εστω $h(x) = \begin{cases} f(3-x^3), & x < 1 \\ f(5-3x), & x \geq 1 \end{cases}$, όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 1$.

β) Αν $f(2) = f'(2) = -\frac{1}{3}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $A(1, h(1))$.

γ) Σημείο $M(x, y)$ με $x > 0, y > 0$ κινείται στην ευθεία (ε) και πλησιάζει τον άξονα $x'x$ με ρυθμό 2 cm/sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $s = (OM)$, όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M έχει τεταγμένη 1.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 2, x > 0$.

α) Να βρείτε σημείο της C_f με θετική τετμημένη, στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδό.

β) Ένα υλικό σημείο N κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec .

i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(1, 7)$.

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\angle NOx = \theta$, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το A .

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f'(x)} - 2}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + f(x) - 8}{x^2 - 1}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

α) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

β) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι θετικός. $\mu 10$

δ) Ένα κινητό κινείται επί της γραφικής παράστασης της f . Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.