

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2018
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)e^x + 1$ και $g(x) = (x \cdot e^x - e^x + 1)x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} .

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της

δ) Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$, τότε να αποδείξετε ότι $E(\Omega) < e^2 + \frac{3}{2}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = ((x-1)e^x + 1)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$		↘ 0 ↗	

Ελάχιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = xf(x)$, οπότε $g'(x) = (xf(x))' = f(x) + xf'(x) = f(x) + x^2e^x \geq 0$ και το «ίσον» με το μηδέν ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση g είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται και η g^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε $g(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x))$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x-1)e^x + 1) = -\infty$, διότι
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{D.L.H. \ x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$,
 οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x-1)e^x + 1) = 1$ και
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-1)e^x + 1) = +\infty$

Άρα:

$$g(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g''(x) = (f(x) + x^2 e^x)' = f'(x) + (x^2 e^x)' = x e^x + 2x e^x + x^2 e^x = 3x e^x + x^2 e^x = x(x+3)e^x$$

Είναι:

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+3)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 0$
- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+3)e^x > 0 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ή } x > 0$

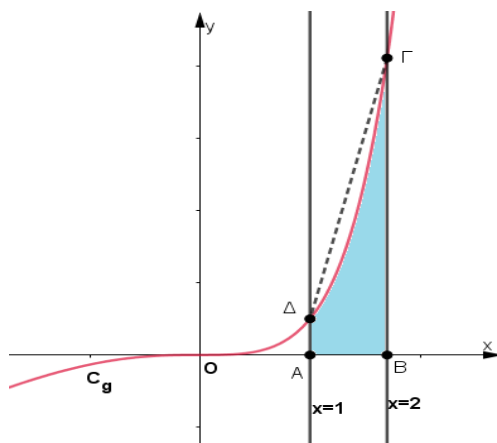
Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$	
$g''(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$
	$\Sigma.K.$		$\Sigma.K.$		

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -3]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x) > 0$ στο $(-\infty, -3)$
- ♦ Η συνάρτηση g είναι κοίλη στο διάστημα $[-3, 0]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x) < 0$ στο $(-3, 0)$
- ♦ Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$
- ♦ Η g'' μηδενίζεται στο $x_0 = -3$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(-3, g(-3))$, δηλαδή το $(-3, 12e^{-3} - 3)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g
- ♦ Η g'' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(0, g(0))$, δηλαδή το $(0, 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g

δ) 1^{ος} τρόπος (με χρήση της γραφικής παράστασης):



Έχουμε:

$E(\Omega) < (AB\Gamma\Delta)$, όπου $AB\Gamma\Delta$ το τραπέζιο με κορυφές τα σημεία:

$A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $\Gamma(2, 2e^2 + 2)$ και $\Delta(1, 1)$.

Είναι:

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \cdot AB = \frac{1 + 2e^2 + 2}{2} \cdot 1 = e^2 + \frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) < e^2 + \frac{3}{2}$$

2^{ος} τρόπος (με υπολογισμό του αντίστοιχου ολοκληρώματος):

$$E(\Omega) = \int_1^2 g(x) dx = \dots\dots$$

ΘΕΜΑ 2ο :

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x) = \frac{e^x}{3f^2(x) + 2f(x) + 1}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$ και $\int_0^{x_0} e^x f(x) dx = \frac{23}{12}$

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\frac{1}{f(x)} - 3} \eta \mu t^2 dt$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$f'(x) = \frac{e^x}{3f^2(x) + 2f(x) + 1} \Leftrightarrow (3f^2(x) + 2f(x) + 1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (f^3(x) + f^2(x) + f(x))' = (e^x)'$$

Άρα θα υπάρχουν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε:

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = e^x + c_1 \text{ για κάθε } x > 0 \quad (1)$$

και

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = e^x + c_2 \text{ για κάθε } x < 0 \quad (2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0 = 0$ οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f^3(x) + f^2(x) + f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + c_1) \Rightarrow f^3(0) + f^2(0) + f(0) = e^0 + c_1 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} c_1 = -1$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f^3(x) + f^2(x) + f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + c_2) \Rightarrow f^3(0) + f^2(0) + f(0) = e^0 + c_2 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} c_2 = -1$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = e^x - 1$$

Όμως η παραπάνω σχέση αληθεύει και για $x = 0$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = e^x - 1 \quad (3)$$

β) Για να είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει το

$$\text{όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ και είναι πραγματικός αριθμός.}$$

Από τη σχέση (3) για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f^3(x) + f^2(x) + f(x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} (f^2(x) + f(x) + 1) = \frac{e^x - 1}{x} \quad (4)$$

Η παράσταση $f^2(x) + f(x) + 1$ είναι τριώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, άρα $f^2(x) + f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{f^2(x) + f(x) + 1}$$

Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow 0} (f^2(x) + f(x) + 1) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f^2(0) + f(0) + 1 = 1$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{f^2(x) + f(x) + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Άρα η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$

γ) Από την αρχική ισότητα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$, οπότε $f(2) > 0$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι $f(2) \leq 1$, τότε έχουμε:

$$f(2), f^2(2), f^3(2) \in (0, 1]$$

Οπότε:

$$f^3(2) + f^2(2) + f(2) \leq 3 \stackrel{(a)}{\Rightarrow} e^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow e^2 \leq 4,$$

που είναι άτοπο.

Άρα $f(2) > 1$, οπότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$.
Για το συγκεκριμένο x_0 έχουμε:

$$f^3(x_0) + f^2(x_0) + f(x_0) = e^{x_0} - 1 \Rightarrow e^{x_0} = 4, \quad (5)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} e^x f(x) dx &= \int_0^{x_0} (e^x)' f(x) dx = \left[e^x f(x) \right]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} e^x f'(x) dx \quad e^x = f^3(x) + f^2(x) + f(x) + 1 \\ &= e^{x_0} f(x_0) - e^0 f(0) - \int_0^{x_0} (f^3(x) + f^2(x) + f(x) + 1) f'(x) dx \quad \begin{matrix} f(x_0)=1 \\ f(0)=0 \end{matrix} \\ &= e^{x_0} - \left[\frac{f^4(x)}{4} + \frac{f^3(x)}{3} + \frac{f^2(x)}{2} + f(x) \right]_0^{x_0} \quad \begin{matrix} f(x_0)=1 \\ f(0)=0 \end{matrix} = e^{x_0} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 0 \right) = \\ &= e^{x_0} - \frac{25}{12} \stackrel{(5)}{=} 4 - \frac{25}{12} = \frac{23}{12} \end{aligned}$$

δ) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta \mu t^2| \leq |t^2| = t^2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t = 0$

Επομένως για $x > 0$ κοντά στο μηδέν και για κάθε $t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ έχουμε:

$$0 < \eta \mu t^2 < t^2 \Rightarrow 0 < \eta \mu t^2 \cdot t^{\frac{1}{f(x)}-3} < t^2 \cdot t^{\frac{1}{f(x)}-3} \Rightarrow 0 < t^{\frac{1}{f(x)}-3} \eta \mu t^2 < t^{\frac{1}{f(x)}-1}$$

Οπότε έχουμε:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 0 dt < \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\frac{1}{f(x)}-3} \eta \mu t^2 dt < \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\frac{1}{f(x)}-1} dt \Rightarrow 0 \left(1 - \frac{1}{2} \right) < \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\frac{1}{f(x)}-3} \eta \mu t^2 dt < \left[\frac{t^{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{f(x)}} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \Rightarrow$$

$$0 < \int_0^1 t^{\frac{1}{f(x)}-3} \eta \mu t^2 dt < f(x) \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{f(x)}} \right]$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f(x) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x > 0,$$

$$\text{οπότε και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{f(x)}} \right] = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{f(x)}} \stackrel{\substack{\frac{1}{f(x)}=u \\ \text{για } x \rightarrow 0^+ \\ \text{το } u \rightarrow +\infty}}{=} 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^u = 1 - 0 = 1$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{f(x)}} \right] = 0 \cdot 1 = 0$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

Επομένως, από το Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\frac{1}{f(x)}-3} \eta \mu t^2 dt = 0 \cdot$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

β) i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2e - f(x)) > e$

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x - (ex + 1) \left(\frac{e}{x} - \frac{1}{e} \right) = 2$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$.

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική της παράσταση, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$

ii) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq a$ για κάθε $x > 0$, τότε $\frac{a}{2} + e \geq 1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} + 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2e}{x^3}$$

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$f'(x) > 0 \quad \text{και} \quad f''(x) < 0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $(0, +\infty)$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{e}{x} + x \right) = -\infty$$

οπότε η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e}{x^2} + 1 \right) = 1, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{DLH} \frac{1}{x} = 0$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

που δεν είναι πραγματικός αριθμός, άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

- β) i) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Επιπλέον, είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{e}{x} + x \right) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{e}{x} + x \right) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , που είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

- ii) Για κάθε $x > 0$ είναι $(2e - f(x)) \in \mathbb{R}$, άρα η ανίσωση έχει ως σύνολο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$. Οπότε με $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f^{-1}(2e - f(x)) > e &\Leftrightarrow 2e - f(x) > f(e) \Leftrightarrow 2e - f(x) > e \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) < e \Leftrightarrow f(x) < f(e) \Leftrightarrow x < e \end{aligned}$$

Άρα λύση της ανίσωσης είναι κάθε πραγματικός αριθμός του διαστήματος $(0, e)$.

- γ) Με $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \ln x - (ex + 1) \left(\frac{e}{x} - \frac{1}{e} \right) &= 2 \Leftrightarrow \ln x - (ex + 1) \frac{e^2 - x}{ex} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x - e^2 + x - \frac{e}{x} + \frac{1}{e} = 2 \Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{x} + x = 2 - \frac{1}{e} + e^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(e^2) \Leftrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

- δ) Είναι:

$$g(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x - \ln x - ex + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} - e \left(x + \frac{1}{x} \right) = (1 - e) \left(x + \frac{1}{x} \right), \quad x > 0$$

- i) Με $x > 0$ είναι $x + \frac{1}{x} > 0$ και επειδή $1 - e < 0$ έχουμε $(1 - e) \left(x + \frac{1}{x} \right) < 0 \Rightarrow g(x) < 0$

Επιπλέον η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$, οπότε αν E είναι το ζητούμενο εμβαδόν, τότε έχουμε:

$$E = - \int_1^e (1 - e) \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = (e - 1) \left[\frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^e = (e - 1) \left(\frac{e^2 - 1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} (e - 1) (e^2 + 1)$$

- ii) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$g'(x) = (1 - e) \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{(1 - e)(x - 1)(x + 1)}{x^2}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Επίσης παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$, ίσο με $M = g(1) = 2(1 - e)$.

Αν για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq \alpha$ για κάθε $x > 0$, τότε προφανώς $\alpha \geq M$ οπότε

$$\alpha \geq M \Rightarrow \alpha \geq 2(1 - e) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + e \geq 1$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 και τα μόνα κοινά σημεία της με τον άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένες -2 και 4 . Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f\left(-\frac{7}{4}\right)$ και τη μονοτονία της f στο διάστημα $[0, +\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-0,1)x^3 + f(1)x^2 + f(2)}{f(-1)f(5)x^2 + f(0)}$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) + f(e^{3x}) = f(e^{2x}) + f(e^{4x})$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \sqrt[4]{f^3(-0,1)f(2)}$

ε) Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in (0, 4)$ ισχύει $(f(x)-1)f''(x) < 0$ να

αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x) dx < 2$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει για ρίζες μόνο τους αριθμούς -2 και 4 , οπότε στο διάστημα $(-2, 4)$ η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f(0)=1$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2, 4)$ και επειδή $-\frac{7}{4} \in (-2, 4)$ είναι $f\left(-\frac{7}{4}\right) > 0$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, +\infty)$, άρα ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα. Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι $f(0) < f(4) \Leftrightarrow 1 < 0$, που είναι άτοπο, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

β) Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι οι αριθμοί $f(-1)$, $f(-0,1)$ είναι θετικοί και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης f ισχύει $f(5) < f(4) \Rightarrow f(5) < 0$, οπότε $f(-1)f(5) < 0$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-0,1)x^3 + f(1)x^2 + f(2)}{f(-1)f(5)x^2 + f(0)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-0,1)x^3}{f(-1)f(5)x^2} = \frac{f(-0,1)}{f(-1)f(5)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = -\infty$$

γ) Παρατηρούμε ότι ο αριθμός μηδέν είναι λύση της εξίσωσης. Επιπλέον, οι αριθμοί e^x , e^{2x} , e^{3x} , e^{4x} ανήκουν στο διάστημα $(0, +\infty)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x > 0$, τότε έχουμε:

$$\begin{cases} e^x < e^{2x} \\ e^{3x} < e^{4x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e^x) > f(e^{2x}) \\ f(e^{3x}) > f(e^{4x}) \end{cases} \Rightarrow f(e^x) + f(e^{3x}) > f(e^{2x}) + f(e^{4x})$$

οπότε η εξίσωση δεν έχει θετική ρίζα.

- Αν $x < 0$, τότε έχουμε:

$$\begin{cases} e^x > e^{2x} \\ e^{3x} > e^{4x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e^x) < f(e^{2x}) \\ f(e^{3x}) < f(e^{4x}) \end{cases} \Rightarrow f(e^x) + f(e^{3x}) < f(e^{2x}) + f(e^{4x})$$

οπότε η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.

Επομένως, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.

- δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, 4]$, οπότε από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής παίρνει στο διάστημα αυτό μια ελάχιστη m και μια μέγιστη M τιμή με $m = 0$ και $M > 0$.

Έχουμε:

$$m < f(-0,1) \leq M \Rightarrow 0 = m^3 < f^3(-0,1) \leq M^3 \text{ και } 0 = m < f(2) < M$$

αφού $0 < 2$ και $f(0) > f(2)$, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει μέγιστο στο 2, οπότε:

$$0 < f^3(-0,1) f(2) < M^4 \Rightarrow 0 < \sqrt[4]{f^3(-0,1) f(2)} < M$$

δηλαδή ο αριθμός $\sqrt[4]{f^3(-0,1) f(2)}$ ανήκει στο διάστημα $f([-2, 4])$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (-2, 4)$

τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \sqrt[4]{f^3(-0,1) f(2)}$, με τον αριθμό αυτό να μην είναι άκρο το διαστήματος αφού η τιμή της f στα άκρα είναι ίση με το μηδέν.

Επομένως, υπάρχει $x_0 \in (-2, 4)$ ώστε $f(x_0) = \sqrt[4]{f^3(-0,1) f(2)}$

- ε) Για κάθε $x \in (0, 4)$ έχουμε:

$f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 1 \Rightarrow f(x) - 1 < 0$, οπότε από την δοθείσα σχέση $(f(x) - 1)f''(x) < 0$ προκύπτει ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[0, 4]$, οπότε είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

Τέλος, λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης f στο $[0, 4]$ για κάθε $x \in [0, 4]$, έχουμε:

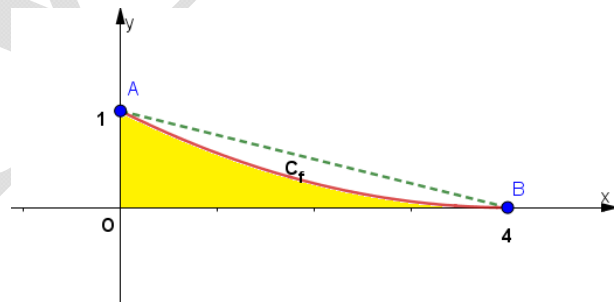
$$f(x) \geq f(4) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0, 4]$, οπότε η γραφική της παράσταση για τις τιμές του x που περιέχονται στο διάστημα αυτό, βρίσκονται από τη «χορδή» AB και κάτω, οπότε για το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τους θετικούς ημιάξονες ισχύει:

$$E = \int_0^4 f(x) dx \text{ και } E < (OAB) \text{ με } (OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$$

Επομένως:

$$\int_0^4 f(x) dx < (OAB) \Rightarrow \int_0^4 f(x) dx < 2$$



Σχόλιο

Παραπάνω αναφέραμε ότι η για την κυρτή συνάρτηση f η γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, 4]$, βρίσκεται από τη «χορδή» AB και κάτω. Η «χορδή» AB διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(4, 0)$, οπότε περιέχεται στην ευθεία AB που έχει εξίσωση:

$$y - 0 = \frac{1}{-4}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1$$

Άρα για μια αλγεβρική απόδειξη του ισχυρισμού, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in [0, 4]$ ισχύει:

$$f(x) + \frac{1}{4}x - 1 \leq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + \frac{1}{4}x - 1$, $x \in [0, 4]$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, 4]$, και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$, με

$$g'(x) = f'(x) + \frac{1}{4} \text{ και } g''(x) = f''(x) > 0,$$

οπότε η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$.

Επιπλέον, $g(0) = g(4) = 0$, οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ με $g'(\xi) = 0$.

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0	ξ	4
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$			

Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της g είναι ίση με το μεγαλύτερο από τους αριθμούς $g(0)$, $g(4)$ καθένας από τους οποίους είναι ίσος με μηδέν.

Επομένως για κάθε $x \in [0, 4]$ έχουμε:

$$g(x) \leq 0, \text{ δηλαδή } f(x) + \frac{1}{4}x - 1 \leq 0$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ και $g(x) = (x \ln x - x + 1) \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g

δ) Αν A είναι το σημείο καμπής της C_g και $B(e, g(e))$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g και το ευθύγραμμο τμήμα AB .

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \left(\ln x - 1 + \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		– 0 +	
$f(x)$		↘ 0 ↗	

Ελάχιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = 0$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) \geq f(1) = 0$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x \ln x - x + 1)' \cdot \ln x + (x \ln x - x + 1) \cdot \frac{1}{x} = \\ &= (\ln x + 1 - 1) \cdot \ln x + \ln x - 1 + \frac{1}{x} = (\ln x)^2 + f(x) \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$(\ln x)^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad f(x) \geq 0$$

Οπότε $g'(x) \geq 0$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 1$, επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι:

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x - x + 1) \ln x = -\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = 0,$$

$$\text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x - x + 1) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x - x + 1) \ln x = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty}^{+\infty - \infty} x (\ln x - 1) = +\infty,$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x - x + 1) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{Επομένως: } g((0, \infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

γ) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με:

$$g''(x) = ((\ln x)^2 + f(x))' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + f'(x), x \in (0, +\infty)$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι:

$$\ln x < 0 \text{ άρα και } 2\ln x \cdot \frac{1}{x} < 0, \text{ επίσης } f'(x) < 0 \text{ στο } (0, 1)$$

Επομένως:

$$g''(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1)$$

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$\ln x > 0 \text{ άρα και } 2\ln x \cdot \frac{1}{x} > 0, \text{ επίσης } f'(x) > 0 \text{ στο } (1, +\infty)$$

Επομένως: $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ.

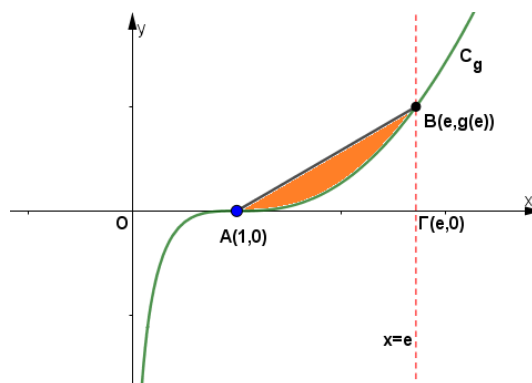
Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση g είναι κοίλη στο διάστημα $(0, 1]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x) < 0$ στο $(0, 1)$
- ♦ Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$
- ♦ Η g'' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(1, g(1))$, δηλαδή το $A(1, 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g

δ) Για κάθε $x \in [1, e] \subseteq [1, +\infty)$ είναι $g(x) \geq 0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g και το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι:

$$E(\Omega) = (AB\Gamma) - \int_1^e g(x) dx, \text{ όπου}$$

$$\bullet (AB\Gamma) = \frac{1}{2}(e-1) \cdot g(e) = \frac{1}{2}(e-1) \cdot 1 = \frac{e-1}{2}$$



$$\bullet \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x(\ln x)^2 - x \ln x + \ln x) dx = \int_1^e x(\ln x)^2 dx - \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$$

Είναι

$$\begin{aligned} \circ \int_1^e x(\ln x)^2 dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' (\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ \int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

$$\circ \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - e + 1 = 1$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^e g(x) dx &= \frac{e^2 - 1}{4} - \frac{e^2 + 1}{4} + 1 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \\ \bullet E(\Omega) &= (AB\Gamma) - \int_1^e g(x) dx = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2} \end{aligned}$$

Σχόλιο

Η ανισότητα του (α) ερωτήματος μπορεί να προκύψει άμεσα από τη γνωστή ανισότητα $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x > 0$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$), αν θέσουμε όπου x το $\frac{1}{x}$

ΘΕΜΑ 6ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t \right) = \frac{f'(x)}{2(x+1)}, \quad x \neq -1 \quad \text{και} \quad f(-1) = \frac{2}{e}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x^2 + 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της C_f

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)(x+1) \leq f(x^2) + 2ex$ για κάθε $x \geq 1$

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \frac{(x^4 + 1)e^{x^2}}{e(x+1)} dx > 3e - 4 - 2 \ln \frac{2}{3}$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \ell &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^t \sqrt{1 + (x+1)\frac{e^x}{e^t} + \frac{1}{e^{2t}}} - e^t \right) = \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^t \left(\sqrt{1 + (x+1)\frac{e^x}{e^t} + \frac{1}{e^{2t}}} - 1 \right) \right), \text{ απροσδιόριστη μορφή } (+\infty) \cdot 0, \text{ οπότε} \\
 \ell &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} \right)^2 - e^{2t}}{\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} + e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1 - e^{2t}}{e^t \left(\sqrt{1 + (x+1)\frac{e^x}{e^t} + \frac{1}{e^{2t}}} + 1 \right)} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t \left((x+1)e^x + \frac{1}{e^t} \right)}{e^t \left(\sqrt{1 + (x+1)\frac{e^x}{e^t} + \frac{1}{e^{2t}}} + 1 \right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^x + \frac{1}{e^t}}{\sqrt{1 + (x+1)\frac{e^x}{e^t} + \frac{1}{e^{2t}}} + 1} = \frac{(x+1)e^x}{2}
 \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned}
 \frac{f'(x)}{2(x+1)} &= \frac{(x+1)e^x}{2} \Rightarrow f'(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x \Rightarrow f'(x) = (x^2 + 1)e^x + 2xe^x \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f'(x) = (x^2 + 1)(e^x)' + (x^2 + 1)'e^x \Rightarrow (f(x))' = [(x^2 + 1)e^x]'
 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)e^x + c_1, & x < -1 \\ \frac{2}{e}, & x = -1 \\ (x^2 + 1)e^x + c_2, & x > -1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$, οπότε έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ (1)

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} [(x^2 + 1)e^x + c_1] = \frac{2}{e} + c_1$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [(x^2 + 1)e^x + c_2] = \frac{2}{e} + c_2$
- $f(-1) = \frac{2}{e}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{2}{e} + c_1 = \frac{2}{e} + c_2 = \frac{2}{e} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Επομένως:

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = ((x^2 + 1)e^x)' = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x = (x + 1)^2 e^x, x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \neq -1 \text{ και η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } -1.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 + 1)e^x] \stackrel{(+\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 1)'}{(e^{-x})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 1)e^x] = +\infty \end{aligned}$$

Η συνάρτησης f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

γ) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= ((x + 1)^2 e^x)' = 2(x + 1)e^x + (x + 1)^2 e^x = \\ &= (x + 1)(2 + x + 1)e^x = (x + 1)(x + 3)e^x, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Είναι:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 3)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = -1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 3)e^x > 0 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ή } x > -1$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$\cup$		$\cap$	$\cup$
		Σ.Κ.	Σ.Κ.	

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -3]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $(-\infty, -3)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $[-3, -1]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) < 0$ στο $(-3, -1)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[-1, +\infty)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $(-1, +\infty)$
- ♦ Η f'' μηδενίζεται στο $x_0 = -3$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(-3, f(-3))$, δηλαδή το $(-3, 10e^{-3})$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- ♦ Η f'' μηδενίζεται στο $x_0 = -1$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(-1, f(-1))$, δηλαδή το $(-1, 2e^{-1})$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

δ) Για $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$, οπότε $x^2 > x > 1$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, x]$, άρα και συνεχής, οπότε από Θ.Μ.Τ

θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 2e}{x - 1}$

Επίσης η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x, x^2]$, άρα και συνεχής, οπότε από Θ.Μ.Τ

θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x, x^2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} = \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x - 1)}$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty) \subseteq [-1, +\infty)$ και $\xi_1, \xi_2 \in (1, +\infty)$ με

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x) - 2e}{x - 1} < \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x - 1)} \xrightarrow{x > 1} f(x) - 2e < \frac{f(x^2) - f(x)}{x} \Rightarrow$$

$$xf(x) - 2ex < f(x^2) - f(x) \Rightarrow (x + 1)f(x) < f(x^2) + 2ex \quad (1)$$

Για $x = 1$ η σχέση (1) ισχύει ως ισότητα.

Πράγματι:

$$2f(1) = f(1) + 2e \Leftrightarrow 4e = 2e + 2e \Leftrightarrow 4e = 4e$$

Οπότε είναι:

$$(x + 1)f(x) \leq f(x^2) + 2ex \quad \text{για κάθε } x \geq 1 \quad (2)$$

ε) Έχουμε:

$$\int_1^2 \frac{(x^4 + 1)e^{x^2}}{e(x + 1)} dx = \int_1^2 \frac{f(x^2)}{e(x + 1)} dx = \frac{1}{e} \int_1^2 \frac{f(x^2)}{x + 1} dx \quad (3)$$

Από τη σχέση (1) για $x > 1$ έχουμε:

$$f(x) - \frac{2ex}{x + 1} < \frac{f(x^2)}{x + 1}$$

Άρα:

$$\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x + 1} dx > \int_1^2 \left(f(x) - \frac{2ex}{x + 1} \right) dx \quad (4)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 (x^2 + 1)e^x dx = \int_1^2 (x^2 + 1)(e^x)' dx = \left[(x^2 + 1)e^x \right]_1^2 - \int_1^2 2xe^x dx = \\ &= 5e^2 - 2e - \int_1^2 2x(e^x)' dx = 5e^2 - 2e - \left[2xe^x \right]_1^2 + \int_1^2 2e^x dx = \\ &= 5e^2 - 2e - 4e^2 + 2e + \left[2e^x \right]_1^2 = e^2 + (2e^2 - 2e) = 3e^2 - 2e \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx &= \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \\ &= [x - \ln(x+1)]_1^2 = 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2 = 1 + \ln \frac{2}{3} \quad (6) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3), (4), (5) και (6) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \cdot \int_1^2 \frac{f(x^2)}{x+1} dx &> \frac{1}{e} \cdot \int_1^2 \left(f(x) - \frac{2ex}{x+1}\right) dx > \frac{1}{e} \cdot \int_1^2 f(x) dx - \frac{1}{e} \cdot 2e \cdot \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx = \\ &= \frac{1}{e} \cdot \int_1^2 f(x) dx - 2 \cdot \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx = \frac{1}{e} \cdot (3e^2 - 2e) - 2 \cdot \left(1 + \ln \frac{2}{3}\right) = 3e - 2 - 2 - 2 \ln \frac{2}{3} = 3e - 4 - 2 \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 7ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε:

- $2f^2(1) + f^2(3) \leq 2f(1) \cdot f(3)$
- $f'(1) = 2$
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση 1-1

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$

γ) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)(f(x) - 2x + 2)}$$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x) dx < \int_1^3 f(x) dx$

ε) Να αποδείξετε ότι $E < (\xi - 1)^2$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\xi$ με ξ το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f .

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f^2(1) + f^2(1) + f^2(3) - 2f(1) \cdot f(3) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(1))^2 + (f(1) - f(3))^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ και } f(1) = f(3)$$

$$1 \neq 3 \text{ ενώ } f(1) = f(3), \text{ άρα η } f \text{ δεν είναι συνάρτηση 1-1}$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$, άρα και συνεχής με $f(1) = f(3)$, οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Επομένως το ξ είναι κρίσιμο σημείο.

Είναι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f'' συνεχής, άρα η $f''(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη, άρα η f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$

γ) 1^{ος} τρόπος:

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, άρα ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε έχουμε:

$$\xi > 1 \Rightarrow f'(\xi) > f'(1) \Rightarrow 0 > 2, \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος:

Για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1, \xi]$, άρα

$$\text{υπάρχει ένα τουλάχιστον } x_0 \in (1, \xi) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(x_0) = \frac{f'(\xi) - f'(1)}{\xi - 1} = \frac{-2}{\xi - 1} < 0.$$

Η συνάρτηση f'' είναι συνεχής και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f''(x_0) < 0$ θα ισχύει και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, 0)$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) \leq 2x - 2 \Leftrightarrow f(x) - 2x + 2 \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με το «ίσο» να ισχύει μόνο για } x = 1$$

Για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$\varphi(x) = \frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)(f(x)-2x+2)} = \frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1} \cdot \frac{1}{f(x)-2x+2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)(f(x)-2x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1} \cdot \frac{1}{f(x)-2x+2} \right) = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1} \stackrel{\text{ΜΟΡΦΗ } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\eta\mu(\pi x))'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} (\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)) = -\pi \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)-2x+2} = -\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 2x + 2) = 0 \text{ και } f(x) - 2x + 2 < 0 \text{ για κάθε } x \text{ κοντά στο } 1$$

δ) Για $x < \xi \stackrel{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Rightarrow f'(x) > 0$, ενώ για $x > \xi \stackrel{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < 0$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$(-\infty, \xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\xi, +\infty)$

Για $x < 1 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$ και για $x > 3 \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x) < f(3) \Rightarrow f(x) < 0$, οπότε:

$$\int_0^1 f(x) dx < 0 \text{ και } \int_3^4 f(x) dx < 0 \quad (1)$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\int_0^4 f(x) dx < \int_1^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx < \int_1^3 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx < 0, \text{ που ισχύει από (1)}$$

ε) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, \xi]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, \xi]$, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, \xi] \subset (-\infty, \xi]$ και $f(1) = 0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \xi$ είναι

$$E = \int_1^{\xi} f(x) dx.$$

Από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $f(x) \leq 2x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = 1$, οπότε

$$\int_1^{\xi} f(x) dx < \int_1^{\xi} (2x - 2) dx \Rightarrow E < \left[x^2 - 2x \right]_1^{\xi} \Rightarrow E < (\xi - 1)^2$$

ΘΕΜΑ 8ο

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 1$
- $(x - 1)f''(x) + 2f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(0, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(1) = \frac{2}{3}$

δ) Έστω συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις $g(1) = 1$ και $(g(x) - f(x))(g(x) + 3f(x)) = 0$, για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $f = g$

ε) Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/sec. Αν A είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και B τυχαίο σημείο του άξονα $y'y$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ABM τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο $(1, f(1))$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} xf''(x) - f''(x) + 2f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \Rightarrow xf''(x) + f'(x) - f''(x) + f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (xf'(x) - f'(x) + f(x))' &= \left(\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow xf'(x) - f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} + c_1 \quad (1) \end{aligned}$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(1) - f'(1) + f(1) = 1 + c_1 \stackrel{f(1)=1}{\Leftrightarrow} c_1 = 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$xf'(x) - f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow (xf(x) - f(x))' = (\ln x)' \Rightarrow xf(x) - f(x) = \ln x + c_2, \text{ για κάθε } x > 0 \quad (2)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(1)-f(1)=\ell n1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$xf(x)-f(x)=\ell nx \Rightarrow (x-1)f(x)=\ell nx, \text{ για κάθε } x>0 \quad (3)$$

Για $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ από τη σχέση (3) έχουμε $f(x)=\frac{\ell nx}{x-1}$ και από υπόθεση $f(1)=1$, οπότε

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\ell nx}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

β) Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{\ell nx}{x-1}\right)'=\frac{\frac{1}{x} \cdot (x-1)-\ell nx}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-\ell nx}{(x-1)^2}=\frac{h(x)}{(x-1)^2} \quad (3),$$

όπου

$$h(x)=1-\frac{1}{x}-\ell nx, \quad x>0$$

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$h'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}, \quad x>0$$

Είναι:

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$
- $h'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^2}<0 \Leftrightarrow x>1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$		0	

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0,1]$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x \in (0,1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $h'(x)<0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ με μέγιστη τιμή $h(1)=0$

Οπότε είναι:

$$h(x)<h(1)=0, \text{ για κάθε } x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f'(x)<0, \text{ για κάθε } x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0, +\infty)$, επομένως το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x))$.

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$

Άρα: $f(A) = (0, +\infty)$

γ) Για $x=1$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$0 \cdot f''(1) + 2f'(1) = -1 \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

Για τιμές του x κοντά στο 1 είναι:

$$\frac{f'(x) - f'(1)}{x-1} = \frac{\frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{2 - \frac{2}{x} - 2\ln x + (x-1)^2}{2(x-1)^3}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{2}{x} - 2\ln x + (x-1)^2}{2(x-1)^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} + 2(x-1)}{6(x-1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x + 2(x-1)x^2}{6x^2(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1) + 2x^2(x-1)}{6x^2(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x^2-1)}{6x^2(x-1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^2(x+1)}{6x^2(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{3x^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άρα:

$$f''(1) = \frac{2}{3}$$

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\begin{aligned} g^2(x) + 3f(x)g(x) - f(x)g(x) - 3f^2(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g^2(x) + 2f(x)g(x) + f^2(x) &= 4f^2(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (g(x) + f(x))^2 &= 4f^2(x) \Leftrightarrow \varphi^2(x) = 4f^2(x) \Leftrightarrow |\varphi(x)| = 2|f(x)| \quad (4) \end{aligned}$$

όπου $\varphi(x) = g(x) + f(x)$, $x > 0$

Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $\varphi(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων f , g . Επομένως η συνάρτηση φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ με $\varphi(1) = g(1) + f(1) = 1 + 1 = 2 > 0$, οπότε $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα η σχέση (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$\varphi(x) = 2f(x) \Leftrightarrow g(x) + f(x) = 2f(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Επειδή οι συναρτήσεις f , g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, συμπεραίνουμε ότι $f = g$.

ε) Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή t η θέση του σημείου M είναι $M(x(t), y(t))$ και το εμβαδόν του τριγώνου ABM είναι $E(t)$.

Είναι:

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot (AM) \cdot (B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot |f(x(t))| \cdot x(t) = \frac{1}{2} \cdot f(x(t)) \cdot x(t),$$

αφού $x(t) > 0$ και $f(x(t)) > 0$

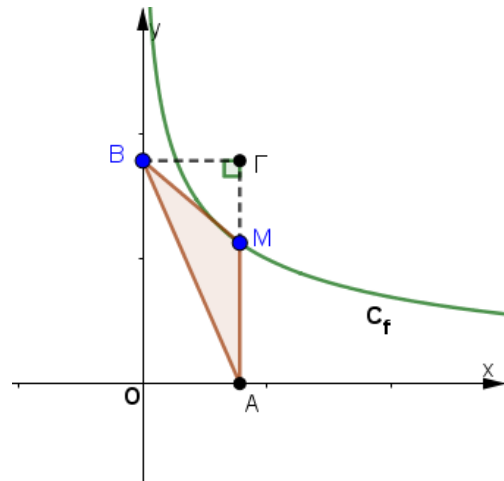
Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι:

$$E'(t) = \frac{1}{2} \cdot f'(x(t)) \cdot x'(t) \cdot x(t) + \frac{1}{2} \cdot f(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{1}{2} \cdot x'(t) (f'(x(t))x(t) + f(x(t)))$$

Αν t_0 είναι η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $(1, f(1))$, τότε $x(t_0) = 1$.

Επίσης $x'(t_0) = 4 \text{ cm/sec}$, οπότε έχουμε:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot x'(t_0) (f'(x(t_0))x(t_0) + f(x(t_0))) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (f'(1) \cdot 1 + f(1)) \stackrel{f(1)=1}{\underset{f'(1)=-\frac{1}{2}}{=}} 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \right) = 1 \text{ cm}^2/\text{sec}$$



ΘΕΜΑ 9ο

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: (-e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$e^{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}, \text{ για κάθε } x \in (-e, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + e)$, $x \in (-e, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τους ημιάξονες Ox' και Oy .

ε) Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό a , αν ισχύει $e^{f(x)} + 2e^x - xa \geq e + 2$ για κάθε $x > -e$

στ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} dx > \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (-e, +\infty)$ είναι:

$$e^{f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + c, c \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Για $x = 0$ από την αρχική σχέση έχουμε $f(0) = 1$ και από τη σχέση (1) έχουμε $e^{f(0)} = c \Leftrightarrow c = e$.

Έχουμε λοιπόν $e^{f(x)} = x + e \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + e)$, $x > -e$.

- β) Από την αρχική σχέση έχουμε $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-e, +\infty)$, επομένως είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x , στο διάστημα $(-e, +\infty)$.

Έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(x+e) \Leftrightarrow x+e = e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^y - e \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y - e, y \in \mathbb{R},$$

αφού $e^y - e > -e$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^x - e$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+e) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+e) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x+e}{e^x} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} (\ln \omega) = -\infty,$$

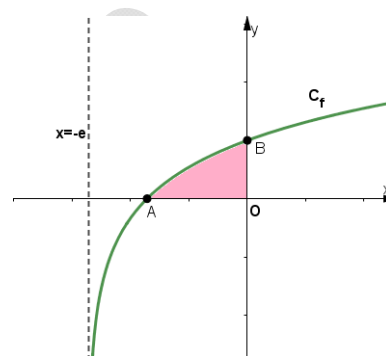
$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+e}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\infty}{\infty}}{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \stackrel{-x=u}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

- δ) Για $y = 0$ είναι:

$$\ln(x+e) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+e) = \ln 1 \Leftrightarrow x+e = 1 \Leftrightarrow x = 1-e$$

οπότε οι συντεταγμένες του κοινού σημείου A της γραφικής C_f της συνάρτησης f με τον ημιάξονα Ox' είναι $A(1-e, 0)$.

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τους ημιάξονες Ox' και Oy είναι:



$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{1-e}^0 \ln(x+e) dx = \int_{1-e}^0 (x+e)' \ln(x+e) dx = [(x+e) \ln(x+e)]_{1-e}^0 - \int_{1-e}^0 (x+e) (\ln(x+e))' dx = \\ &= e \ln e - \int_{1-e}^0 (x+e) \cdot \frac{1}{x+e} dx = e - \int_{1-e}^0 1 dx = e - 1 \cdot (0 - (1-e)) = 1 \end{aligned}$$

- ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = e^{f(x)} + 2e^x - x\alpha - e - 2, x \in (-e, +\infty)$$

Για κάθε $x \in (-e, +\infty)$ είναι:

$$e^{f(x)} + 2e^x - x\alpha \geq e + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} + 2e^x - x\alpha - e - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$$

Δείξαμε ότι $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in (-e, +\infty)$, άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-e, +\infty)$ με:

$$g'(x) = e^{f(x)} f'(x) + 2e^x - \alpha$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με

$$g'(0) = e^{f(0)} f'(0) + 2e^0 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$g'(0) = e^{f(0)} \frac{1}{e^{f(0)}} + 2e^0 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$g'(0) = 3 - \alpha$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow 3 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

στ) Για $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ισχύει :

$$x \geq x^2 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) \geq f(x^2) \Rightarrow \ln(x+e) \geq \ln(x^2+e) \Rightarrow \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} \geq 1,$$

αφού $\ln(x^2+e) > 0$, για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} dx > \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} dx > 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} dx > \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 10ο

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$

- $x^2 f'(x) + 1 = 4 \int_1^x f(x) dx - x f(x)$, για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, για κάθε $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f(2x+3) - x}{e^x} dx < 3 - \frac{4}{e}$

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και $g(x) = -x^2$ αντιστοίχως έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\int_1^x f(x) dx = \alpha \in \mathbb{R}$ (1), οπότε η αρχική σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 f'(x) + 1 = 4\alpha - x f(x) \Leftrightarrow x^2 f'(x) + x f(x) = 4\alpha - 1 \Leftrightarrow x f'(x) + f(x) = (4\alpha - 1) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$(x f(x))' = ((4\alpha - 1) \ln x)' \Leftrightarrow x f(x) = (4\alpha - 1) \ln x + c, \text{ για κάθε } x > 0 \quad (2)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(1) = (4\alpha - 1) \ln 1 + c \Leftrightarrow f(1) = 0 + c \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} c = 0$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(x) = \frac{(4\alpha - 1)\ell nx}{x}, \text{ για κάθε } x > 0 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$\int_1^e \frac{(4\alpha - 1)\ell nx}{x} dx = \alpha \Leftrightarrow (4\alpha - 1) \int_1^e \ell nx \cdot \frac{1}{x} dx = \alpha \Leftrightarrow$$

$$(4\alpha - 1) \int_1^e \ell nx \cdot (\ell nx)' dx = \alpha \Leftrightarrow (4\alpha - 1) \left[\frac{\ell n^2 x}{2} \right]_1^e = \alpha \Leftrightarrow$$

$$(4\alpha - 1) \left(\frac{\ell n^2 e}{2} - \frac{\ell n^2 1}{2} \right) = \alpha \Leftrightarrow (4\alpha - 1) \cdot \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \alpha \Leftrightarrow$$

$$2\alpha - \frac{1}{2} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f(x) = \frac{\ell nx}{x}, \text{ για κάθε } x > 0$$

β) Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$f(x) \leq x - 1 \Leftrightarrow \frac{\ell nx}{x} \leq x - 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ell nx \leq x^2 - x \Leftrightarrow \ell nx - x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq 0 \quad (4),$$

όπου

$$h(x) = \ell nx - x^2 + x, \text{ για κάθε } x > 0$$

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} = \frac{-(x-1)(2x+1)}{x}$$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)(2x+1)}{x} = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 1$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)(2x+1)}{x} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x < 1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$		0	

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ με μέγιστη τιμή $h(1) = 0$

Οπότε είναι:

$$h(x) \leq h(1) \Leftrightarrow h(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα αληθεύει η ζητούμενη ανισότητα (4).

γ) Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $2x + 3 > 0$, οπότε από το (β) ερώτημα έχουμε:

$$f(2x+3) \leq 2x+3-1 \Leftrightarrow f(2x+3) - x \leq x+2 \Leftrightarrow \frac{f(2x+3)-x}{e^x} \leq \frac{x+2}{e^x}$$

Επειδή το «ίσον» δεν ισχύει για κάθε $x \in [0, 1]$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_0^1 \frac{f(2x+3)-x}{e^x} dx < \int_0^1 \frac{x+2}{e^x} dx \quad (5)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x+2}{e^x} dx &= \int_0^1 (x+2)e^{-x} dx = - \int_0^1 (x+2)(e^{-x})' dx = \\ &= - \left(\left[(x+2)e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (x+2)' e^{-x} dx \right) = - \left(\frac{3}{e} - 2 - \int_0^1 e^{-x} dx \right) = \\ &= -\frac{3}{e} + 2 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{3}{e} + 2 - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -\frac{3}{e} + 2 - (e^{-1} - 1) = 3 - \frac{4}{e} \end{aligned}$$

Επομένως από τη σχέση (5) έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{f(2x+3)-x}{e^x} dx < 3 - \frac{4}{e}$$

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{\ell \ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ell \ln x}{x^2}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = (-x^2)' = -2x$$

Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη μόνο όταν υπάρχει $\alpha > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ να ταυτίζεται με την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(\beta, g(\beta))$

Αν (ε_1) είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, τότε είναι:

$$\varepsilon_1: y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow \varepsilon_1: y = f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$$

Αν (ε_2) είναι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(\beta, g(\beta))$, τότε είναι:

$$\varepsilon_2: y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow \varepsilon_2: y = g'(\beta)x + g(\beta) - \beta g'(\beta)$$

Οπότε:

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - \ell \ln \alpha}{\alpha^2} = -2\beta \\ \frac{\ell \ln \alpha}{\alpha} - \alpha \frac{1 - \ell \ln \alpha}{\alpha^2} = -\beta^2 - \beta(-2\beta) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\ell n \alpha - 1}{2\alpha^2} \\ \beta^2 = \frac{2\ell n \alpha - 1}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\ell n \alpha - 1}{2\alpha^2} \\ \frac{(\ell n \alpha - 1)^2}{4\alpha^4} = \frac{2\ell n \alpha - 1}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\ell n \alpha - 1}{2\alpha^2} \\ 2\ell n \alpha - 1 - \frac{(\ell n \alpha - 1)^2}{4\alpha^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\ell n \alpha - 1}{2\alpha^2} & \text{(I)} \\ \varphi(\alpha) = 0 & \text{(II)} \end{cases}, \text{ όπου } \varphi(\alpha) = 2\ell n \alpha - 1 - \frac{(\ell n \alpha - 1)^2}{4\alpha^3}, \alpha > 0$$

Η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$, αφού είναι συνεχής στο διάστημα αυτό, ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και

$$\varphi(1) \cdot \varphi(e) = \left(0 - 1 - \frac{1}{4}\right) \cdot (2 - 1 - 0) = \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot 1 = -\frac{5}{4} < 0$$

Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho) = 0$, δηλαδή η εξίσωση (II) έχει μια τουλάχιστον λύση. Άρα το σύστημα έχει μια τουλάχιστον λύση την

$$\begin{cases} \alpha = \rho \\ \beta = \frac{\ell n \rho - 1}{2\rho^2} \end{cases}, \rho \in (1, e)$$

Άρα οι C_f και C_g έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ 11ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & , \quad x < 1 \\ e^{x-1} + \ell n x - 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a .
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa > 1$ υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(\xi) = \frac{f(\kappa) + \kappa f(\kappa+1) + (\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}$$

ΛΥΣΗ

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$, ως ρητή συνάρτηση.
 - Η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
 - Εξετάζουμε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$.

Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Οπότε η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$

β) ♦ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 1)$ με:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$

♦ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο διάστημα $(1, +\infty)$ με:

$$f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} > 0$$

Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{x-1} + \ln x - 2) = -1 = f(-1)$$

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, +\infty)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

♦ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 1)$ με:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1)$

♦ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, +\infty)$ με:

$$f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2}$$

Για $x > 1$ είναι:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1} > e^0 \\ \frac{1}{x^2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1} > 1 \\ -\frac{1}{x^2} > -1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} e^{x-1} - \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{x-1} + \ln x - 2) = -1 = f(-1)$$

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, +\infty)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$.

γ) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$

Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\text{Οπότε έχουμε } f((-\infty, -1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$$

• Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Είναι:

$$\circ f(1) = -1$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} + \ln x - 2) = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$$

Οπότε έχουμε $f([1, +\infty)) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0) \cup [-1, +\infty) = \mathbb{R}$$

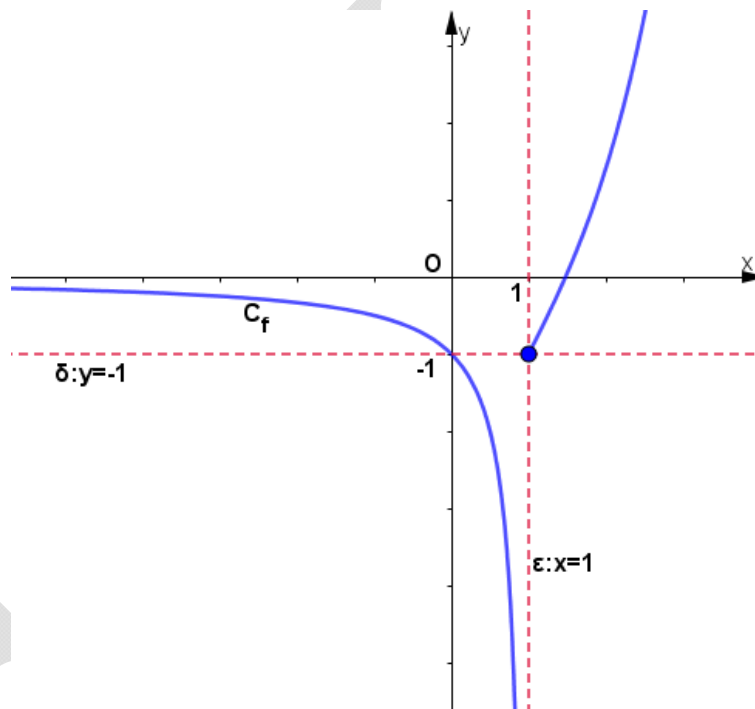
δ) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$

• Είναι $f(1) = -1 < 0$ και $f(2) = e + \ln 2 - 2 > 0$, οπότε $f(1) \cdot f(2) < 0$.

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1, 2]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και είναι μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

ε) Είναι $0 \neq 1$ ενώ $f(0) = f(1) = -1$, άρα η συνάρτηση f δεν είναι «1-1», οπότε δεν αντιστρέφεται.

στ) Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι:



- Αν $\alpha \in (-\infty, -1)$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(-\infty, 1)$
- Αν $\alpha = -1$ η εξίσωση $f(x) = -1$ έχει δύο λύσεις τις $x = 0$ και $x = 1$
- Αν $\alpha \in (-1, 0)$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς δύο λύσεις μια στο $(-\infty, 0)$ και μια στο $(1, 2)$
- Αν $\alpha \in [0, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(1, +\infty)$

ζ) Ισχύει $f(x) > -1$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε:

$$\circ f(\kappa) > -1 \quad (1)$$

$$\circ f(\kappa+1) > -1 \Leftrightarrow \kappa \cdot f(\kappa+1) > -\kappa \quad (2)$$

$$\circ f(\kappa+2) > -1 \Leftrightarrow (\kappa+1)f(\kappa+2) > -\kappa-1 \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$f(k) + kf(k+1) + (k+1)f(k+2) > -2k - 2 = -2(k+1),$$

οπότε

$$\frac{f(k) + kf(k+1) + (k+1)f(k+2)}{2(k+1)} > -1, \text{ αφού } k+1 > 0$$

δηλαδή ο αριθμός $\frac{f(k) + kf(k+1) + (k+1)f(k+2)}{2(k+1)} \in [-1, +\infty) = f([1, +\infty))$

Άρα υπάρχει $\xi \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(k) + kf(k+1) + (k+1)f(k+2)}{2(k+1)},$$

το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

ΘΕΜΑ 12ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x < 0 \\ \ln(e^x + x) & , x \geq 0 \end{cases}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια:

- στο πεδίο ορισμού της.
- στο διάστημα $[0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$

ε) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 0$, η εξίσωση $\frac{e^{f(x)} - f(x)}{x} + \frac{f(x)}{x-a} = 0$ (I), έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, a)$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x^2} - 1) + f(|x| - |\eta \mu x|) = 0$.

ζ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

ΛΥΣΗ

- α) i) • Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, ως ρητή συνάρτηση.
 • Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
 • Εξετάζουμε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$.

Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Οπότε η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

ii) • Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

• Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x + x) = 1 = f(0)$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$ (Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 73).

β) ♦ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 0)$ με:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$

♦ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} > 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, +\infty)$ (α) ii) ερώτημα)

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

γ) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$

Είναι:

◦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

◦ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Οπότε έχουμε $f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$

• Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Είναι:

◦ $f(0) = 0$

◦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + x)) = +\infty$,

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + x)) \stackrel{e^x + x = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) = +\infty$

Οπότε έχουμε $f([0, +\infty)) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$$

δ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = x$.

• Για $x < 0$ έχουμε:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x = -1$$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $A(-1, -1)$.

- Για $x \geq 0$ έχουμε:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln(e^x + x) = x \Leftrightarrow \ln(e^x + x) = \ln e^x \Leftrightarrow e^x + x = e^x \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $O(0, 0)$.

Επομένως τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$ είναι $O(0, 0)$ και $A(-1, -1)$.

- ε) Για $x \in \mathbb{R}^* - \{\alpha\}$ έχουμε:

$$\frac{e^{f(x)} - f(x)}{x} + \frac{f(x)}{x - \alpha} = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(e^{f(x)} - f(x)) + xf(x) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = (x - \alpha)(e^{f(x)} - f(x)) + xf(x), \quad x \in [0, \alpha]$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \alpha] \subseteq [0, +\infty)$
- Είναι $h(0) = -\alpha(e^{f(0)} - f(0)) = -\alpha < 0$ και $h(\alpha) = \alpha f(\alpha) > 0$, (αφού $\alpha > 0 \Rightarrow f(\alpha) > f(0) \Rightarrow f(\alpha) > 0$),
οπότε $h(0) \cdot h(\alpha) < 0$.

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, \alpha]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \alpha)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - \alpha)(e^{f(x_0)} - f(x_0)) + x_0 f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{f(x_0)} - f(x_0)}{x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha} = 0$$

Επομένως η εξίσωση (I) έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \alpha)$

- στ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$-|x| \leq |ημx| \leq |x| \Rightarrow |x| - |ημx| \geq 0 \quad (1)$$

(η ισότητα ισχύει μόνον για $x=0$)

Έχουμε:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Rightarrow e^{x^2} \geq 1 \Rightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0 \quad (2)$$

Λόγω των σχέσεων (1) και (2) η εξίσωση $f(e^{x^2} - 1) + f(|x| - |ημx|) = 0$ θα λυθεί στο διάστημα $[0, +\infty)$

Για να ισχύει η ισότητα $f(e^{x^2} - 1) + f(|x| - |ημx|) = 0$ και δεδομένου ότι $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$ πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} f(e^{x^2} - 1) = 0 \\ f(|x| - |ημx|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(e^{x^2} - 1) = f(0) \\ f(|x| - |ημx|) = f(0) \end{cases} \begin{matrix} f \uparrow \text{ στο } [0, +\infty) \\ f: 1-1 \text{ στο } [0, +\infty) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2} - 1 = 0 \\ |x| - |ημx| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

- ζ) ♦ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 0)$ με:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right)' = \frac{2}{x^3} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0)$

- ♦ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με:

$$f''(x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^x + x} \right)' = \frac{(e^x + 1)'(e^x + x) - (e^x + 1)(e^x + x)'}{(e^x + x)^2} =$$

$$= \frac{e^x(e^x + x) - (e^x + 1)^2}{(e^x + x)^2} = \frac{xe^x - 2e^x - 1}{(e^x + x)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = xe^x - 2e^x - 1$, $x \geq 0$

Η συνάρτηση k είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με:

$$k'(x) = e^x + xe^x - 2e^x = xe^x - e^x = (x-1)e^x, \quad x > 0$$

Είναι:

- $k'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $k'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης k είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$k'(x)$	–	0	+
$k(x)$		$-e-1$	

Ελάχιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση k είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $k'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, οπότε η συνάρτηση k είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$
- Η συνάρτηση k είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $k'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση k παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $k(1) = -e - 1$

Επιπλέον έχουμε:

- $k([0, 1]) = [k(1), k(0)] = [-e - 1, -3]$. Το διάστημα αυτό δεν περιέχει το μηδέν άρα η συνάρτηση k δε μηδενίζεται, επομένως $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.
- $k([1, +\infty)) = [k(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)] = [-e - 1, +\infty)$,

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 2e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-2)e^x - 1) = +\infty$$

Το $0 \in [-e - 1, +\infty)$, άρα θα υπάρχει $\xi \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $k(\xi) = 0$, το οποίο είναι και μοναδικό αφού η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Επειδή:

$$f''(x) = \frac{k(x)}{(e^x + x)^2} \text{ για κάθε } x \geq 0$$

συμπεραίνουμε ότι για το μοναδικό αυτό $\xi \in (1, +\infty)$ θα ισχύει $f''(\xi) = 0$.

Επίσης:

Για $x \in (1, \xi)$ έχουμε:

$$1 < x < \overset{k \uparrow}{\xi} \Rightarrow k(x) < k(\xi) \Rightarrow k(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

ενώ για $x \in (\xi, +\infty)$ έχουμε:

$$x > \overset{k \uparrow}{\xi} \Rightarrow k(x) > k(\xi) \Rightarrow k(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Επομένως το σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 13ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x$ και η ευθεία ε που εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στα σημεία της $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 \neq x_2$

- Να βρείτε τα σημεία A, B και την εξίσωση της ευθείας ε .
- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία ε .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-2, -1)$, στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ακρότατο.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x + 2.$$

- Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - (x_1^4 - 2x_1^2 + 2x_1) = (4x_1^3 - 4x_1 + 2)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = (4x_1^3 - 4x_1 + 2)x - 4x_1^4 + 4x_1^2 - 2x_1^4 + x_1^4 - 2x_1^2 + 2x_1^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = (4x_1^3 - 4x_1 + 2)x - 3x_1^4 + 2x_1^2 \quad (1).$$

- Η εφαπτομένη της C_f στο B έχει εξίσωση:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

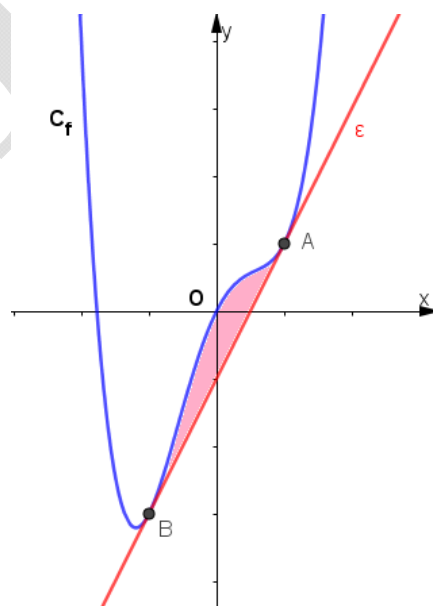
$$\Leftrightarrow y = (4x_2^3 - 4x_2 + 2)x - 3x_2^4 + 2x_2^2 \quad (2).$$

Οι εξισώσεις (1), (2) περιγράφουν την ίδια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$, οπότε πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 4x_1 + 2 = 4x_2^3 - 4x_2 + 2 \\ -3x_1^4 + 2x_1^2 = -3x_2^4 + 2x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1^3 - x_2^3) - 4(x_1 - x_2) = 0 \\ -3(x_1^4 - x_2^4) + 2(x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 4(x_1 - x_2) = 0 \\ -3(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1) = 0 & x_1 \neq x_2 \\ (x_1^2 - x_2^2)[-3(x_1^2 + x_2^2) + 2] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \quad \text{ή} \quad -3(x_1^2 + x_2^2) + 2 = 0 \end{cases}$$



Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1$, τότε:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1^2 + x_1^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_1 = -1.$$

Για $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, οπότε $A(1, f(1))$ και $B(-1, f(-1))$, δηλαδή $A(1, 1)$ και $B(-1, -3)$.

Όμοια αν $x_1 = -1$.

- Αν $-3(x_1^2 + x_2^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}$, τότε $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + x_1x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 = \frac{1}{3}$.

Έτσι:

$$\begin{cases} x_1x_2 = \frac{1}{3} \\ x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1x_2 = \frac{2}{3} \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1x_2 = \frac{2}{3} \\ (x_1 - x_2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1x_2 = \frac{2}{3} \\ x_1 = x_2 \end{cases} \text{ Άτοπο.}$$

Επομένως $A(1, 1)$ και $B(-1, -3)$, οπότε η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y - 1 = \frac{-4}{-2}(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση της διαφοράς των f, g όπου $g(x) = 2x - 1$.

Είναι:

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 2x^2 + 2x - (2x - 1) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$$

με $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν E είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{15} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

- $f'(x) = 4x^3 - 4x + 2$
- $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$

Είναι:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα

αυτό και $f''(x) > 0$ στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				
		Σ.Κ.	Σ.Κ.	

- ♦ Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) < 0$ στο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x + 2 = 2(2x^3 - 2x + 1).$$

- Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[-2, -1]$,
- $f'(-2) = -22$, $f'(-1) = 2$, οπότε $f'(-2) \cdot f'(-1) = -44 < 0$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Ακόμα η $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (-2, -1) \subseteq \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, -1]$.

Επομένως η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο $(-2, -1)$, άρα και στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

x	$-\infty$	-2	x_0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$f'(x)$			0		
$f(x)$					

T.E.

Έστω $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Έχουμε:

- Στο διάστημα $(-\infty, x_1]$ η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα και έχει ρίζα το x_0 .

- $f'(x_2) = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{18 - 8\sqrt{3}}{9} > 0$.

- Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ισχύει ότι: $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$.

- Στο διάστημα $[x_2, +\infty)$ ισχύει ότι: $x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Επομένως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$, οπότε το $f(x_0)$ είναι ολικό ακρότατο της συνάρτησης f .

x	$-\infty$	-2	x_0	-1	x_1	x_2	$+\infty$	
$f''(x)$		+		+	0	-	0	+
$f'(x)$		-	0	+	+	+	+	
$f(x)$			0					

ΘΕΜΑ 14ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x^x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ και $g(x) = \ln^2 x - \frac{1}{x}, \quad x > 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα.
 γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.
 δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^{x \ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x - x \ln x} \quad (1)$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Θέτουμε:

$x - x \ln x = u$, οπότε για $x \rightarrow 0^+$ έχουμε $u \rightarrow 0^+$, αφού $\ln x < 0$, άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} e^u = 1 = f(0), \text{ άρα η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0.$$

β) Για $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^x} \right)' = \left(e^{x - x \ln x} \right)' = e^{x - x \ln x} (x - x \ln x)' = \frac{e^x}{x^x} \left(1 - \ln x - x \frac{1}{x} \right) = \frac{e^x}{x^x} (-\ln x).$$

Είναι:

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{e^x \cdot \ln x}{x^x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{e^x \cdot \ln x}{x^x} > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	1	$\nearrow$ e	$\searrow$ 0

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Είναι:

- $f(0) = 1$
- $f(1) = e$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{x \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x \ln x} \stackrel{x(1 - \ln x) = u}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 - \ln x)) = -\infty$

Οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$ και μέγιστη τιμή στη θέση $x_1 = 1$ το $f(1) = e$

γ) Είναι:

$$g(x) = \ln^2 x - \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής διάστημα $[1, e]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $g(1) \cdot g(e) = (-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$.

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1, e]$, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e) \subseteq (0, +\infty)$, δηλαδή μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = \left(\ln^2 x - \frac{1}{x} \right)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x \ln x + 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}, \quad x > 0$$

όπου $h(x) = 2x \ln x + 1$, $x > 0$

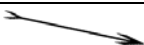
Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με:

$$h'(x) = (2x \ln x + 1)' = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2(\ln x + 1), \quad x > 0$$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e}$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(\ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{e}$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$h'(x)$	—	0	+
$h(x)$		$h(e^{-1})$	

Ελάχιστο

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = e^{-1}$ με ελάχιστη τιμή

$$h(e^{-1}) = h\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} + 1 = \frac{2}{e} \cdot (-\ln e) + 1 = \frac{2}{e} \cdot (-1) + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} > 0$$

Οπότε για κάθε $x > 0$ είναι:

$$h(x) \geq h(e^{-1}) > 0 \Rightarrow h(x) > 0$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι:

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0$$

Δηλαδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

δ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{-e^x \cdot \ln x}{x^x} \right)' = - \left[\left(\frac{e^x}{x^x} \right)' \cdot \ln x + \left(\frac{e^x}{x^x} \right) \cdot (\ln x)' \right] = - \left(-\frac{e^x \cdot \ln x}{x^x} \cdot \ln x + \frac{e^x}{x^x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{e^x}{x^x} \left(\ln^2 x - \frac{1}{x} \right),$$

$$\text{Άρα } f''(x) = \frac{e^x}{x^x} \cdot g(x), \quad x > 0$$

$$\text{Είναι } f''(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^\alpha} \cdot g(\alpha) = 0, \text{ οπότε:}$$

- για $0 < x < \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x^x} \cdot g(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$
- για $x > \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x^x} \cdot g(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

Επειδή η f'' μηδενίζεται μόνο για $x = \alpha$ και εκατέρωθεν του α αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

ΘΕΜΑ 15ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(1 + \eta \mu x)^2 f'(x) = \sigma \nu x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$
- $f(0) = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - \frac{1}{1 + \eta \mu x}$, $x \in [0, \pi]$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x - x}{x f(x)}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = (2x - \pi)f'(x) + 1$

ε) Να εξετάσετε αν η ευθεία $x = \rho$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (δ), χωρίζει το χωρίο Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in [0, \pi]$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (1 + \eta \mu x)^2 f'(x) &= \sigma \nu x \Rightarrow f'(x) = \frac{\sigma \nu x}{(1 + \eta \mu x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1 + \eta \mu x)'}{(1 + \eta \mu x)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \left(-\frac{1}{1 + \eta \mu x} \right)' \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{1 + \eta \mu x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = -\frac{1}{1+\eta\mu 0} + c, \text{ δηλαδή } c = 1, \text{ αφού } f(0) = 0.$$

Άρα:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+\eta\mu x}, x \in [0, \pi]$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, \pi]$ με:

$$f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}, x \in [0, \pi]$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, διότι $x \in [0, \pi]$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2} > 0 \stackrel{(1+\eta\mu x)^2 > 0}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{1}{2}$	
Μέγιστο			

Είναι:

- $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

- Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0 = \frac{\pi}{2}$ με μέγιστη τιμή $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, ενώ στις θέσεις $x_1 = 0$ και $x_2 = \pi$ παρουσιάζει ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $f(0) = f(\pi) = 0$.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2} \right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'(1+\eta\mu x)^2 - \sigma\upsilon\nu x \left((1+\eta\mu x)^2 \right)'}{(1+\eta\mu x)^4} \\ &= \frac{-\eta\mu x (1+\eta\mu x)^2 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x (1+\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)^4} = -\frac{\eta\mu x (1+\eta\mu x) + 2\sigma\upsilon\nu^2 x}{(1+\eta\mu x)^3}, x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Άρα η f είναι κοίλη.

γ) Για $x > 0$ κοντά στο μηδέν έχουμε:

$$\frac{\eta\mu 2x - x}{xf(x)} = \frac{\eta\mu 2x - x}{x} \cdot \frac{1}{f(x)} = \left(2 \frac{\eta\mu 2x}{2x} - 1\right) \cdot \frac{1}{f(x)}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x - x}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x - x}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(2 \frac{\eta\mu 2x}{2x} - 1\right) \cdot \frac{1}{f(x)} \right) = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2x} \stackrel{u=2x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi), \text{ από ερώτημα (α), οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

δ) Για $x \in [0, \pi]$ έχουμε:

$$2f(x) = (2x - \pi)f'(x) + 1 \Leftrightarrow$$

$$(2x - \pi)f'(x) - 2f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0, \text{ όπου}$$

$$\varphi(x) = (2x - \pi)f'(x) - 2f(x) + 1, x \in [0, \pi]$$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= ((2x - \pi)f'(x) - 2f(x) + 1)' = \\ &= 2f'(x) + (2x - \pi)f''(x) - 2f'(x) = (2x - \pi)f''(x), x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Είναι:

- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - \pi)f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, διότι
 $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, λόγω του ερωτήματος (α).
- $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x - \pi)f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - \pi < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

Οπότε ο πίνακας μονotonίας – ακροτάτων της συνάρτησης φ είναι ο παρακάτω:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$		0	

Μέγιστο

Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ με μέγιστη τιμή $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Λόγω μονotonίας της συνάρτησης φ είναι:

$$\varphi(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x) = (2x - \pi)f'(x) + 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα το $\frac{\pi}{2}$

2^{ος} τρόπος: (Υπόδειξη)

Για $x = \frac{\pi}{2}$ η (I) αληθεύει και $2f(x) > (2x - \pi)f'(x) + 1$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ με Θ.Μ.Τ.

για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x, \frac{\pi}{2}\right]$, αν $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, x\right]$, αν $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

ε) Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 + \eta\mu x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \stackrel{x \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ ή } x = \pi$$

Στο διάστημα $[0, \pi]$ η συνάρτηση f είναι συνεχής και οι τιμές της είναι μη αρνητικές. Για να αποδείξουμε ότι η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ χωρίζει το χωρίο Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx.$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx$, θέτουμε $\pi - x = u \Leftrightarrow x = \pi - u$, τότε $dx = (\pi - u)' du = -du$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε $u_1 = \frac{\pi}{2}$, ενώ για $x = \pi$ έχουμε $u_2 = 0$.

Είναι:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\pi - u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx,$$

διότι $f(\pi - x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, επειδή $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$.

Άρα η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ χωρίζει το χωρίο Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΘΕΜΑ 16ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \sqrt{\epsilon\phi x}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1 + f^4(x)}{2f(x)}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1}$ και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$, στο σημείο $(1, f^{-1}(1))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f^4(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f'(x) = \frac{(\varepsilon\varphi x)'}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}} = \frac{1 + \varepsilon\varphi^2 x}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}} = \frac{1 + f^4(x)}{2f(x)}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\varepsilon\varphi x}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{\varepsilon\varphi x})'}{(x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \varepsilon\varphi^2 x}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1 + \varepsilon\varphi^2 x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}} \right) = +\infty \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f'(x) = \frac{1 + f^4(x)}{2f(x)} > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = [0, +\infty),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\varepsilon\varphi x} = +\infty$$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε είναι «1-1», επομένως ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1} = \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{u - \frac{\pi}{4}}{f(u) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Στο παραπάνω όριο θέσαμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow f(u) = x$.

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε } f(u) = 1 \Leftrightarrow f(u) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \stackrel{f: \langle 1-1 \rangle}{\Leftrightarrow} u = \frac{\pi}{4}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$, στο σημείο $(1, f^{-1}(1))$ είναι:

$$y - f^{-1}(1) = (f^{-1})'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{\pi}{4} = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{\pi}{4}, \text{ αφού}$$

$$(f^{-1})'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1} = 1$$

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \varepsilon \varphi^2 x - 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma \nu^2 x} - 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma \nu^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon \varphi x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [\varepsilon \varphi x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} - \varepsilon \varphi 0 - \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4} \tau.μ. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 17ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι $a=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το $(0, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και η εξίσωση $f^{-1}(x-1)=x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = \frac{1}{2}$ και ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0=1$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

στ) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f'(x) + 1 < f(x) < \frac{x+1}{2}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + 1) = 1,$$

οπότε $a=1$.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$ με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x \ln x}{x-1} \right)' = \frac{(x \ln x)'(x-1) - x \ln x (x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x \ln x - \ln x + x - 1 - x \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ είναι:

$$\ln x < x-1 \Leftrightarrow x-1-\ln x > 0, \text{ οπότε } f'(x) > 0, \quad x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

γ) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 1) = +\infty.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$, άρα $f(A) = (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε είναι και «1-1», άρα η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

Επομένως η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = (0, +\infty)$.

Έχουμε:

$$f^{-1}(x-1) = x \stackrel{x-1 > 0}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x-1)) = f(x) \Leftrightarrow x-1 = f(x) \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x + 1$, $x > 1$.

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[2, 3]$
- Είναι:

$$\circ \quad g(2) = f(2) - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - \ln e = \ln \frac{4}{e} > \ln 1 = 0$$

$$\circ \quad g(3) = f(3) - 3 + 1 = \frac{3 \ln 3}{2} - 2 = \frac{3 \ln 3 - 4}{2} < 0, \text{ αφού}$$

$$3 \ln 3 - 4 < 0 \Leftrightarrow \ln 3^3 < 4 \Leftrightarrow \ln 27 < \ln e^4 \Leftrightarrow 27 < e^4, \text{ ισχύει.}$$

Επομένως από Θεώρημα Bolzano η $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

Είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - 1 = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2} - 1 = -\frac{\ln x - x + 1 + (x-1)^2}{(x-1)^2} = -\frac{\ln x - x + 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = \\ &= -\frac{\ln x + x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x \in (2, 3), \end{aligned}$$

αφού $\ln x > 0$ και $x^2 - 3x + 2 > 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$.

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2, 3)$, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

δ) Για x κοντά στο 1 ($x \neq 1$) είναι:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x \ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2},$$

οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{[(x-1)^2]'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ell n x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{2(x-1)(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ell n x}{2x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ell n x)'}{(2x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

οπότε:

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

Επίσης είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ell n x}{(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ell n x)'}{[(x-1)^2]'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} = f'(1) \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

ε) Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x-1-\ell n x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(x-1)^2 - 2(x-1)(x-1)'(x-1-\ell n x)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{\frac{(x-1)^3}{x} - 2(x-1)(x-1-\ell n x)}{(x-1)^4} = \frac{\frac{(x-1)^2}{x} - 2(x-1-\ell n x)}{(x-1)^3} = \\ &= \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1-\ell n x)}{x(x-1)^3} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 2x + 2x\ell n x}{x(x-1)^3} = \\ &= \frac{2x\ell n x - x^2 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{2x\ell n x - x^2 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{h(x)}{x(x-1)^3} \quad (1), \end{aligned}$$

όπου $h(x) = 2x\ell n x - x^2 + 1$, $x \in (0,+\infty)$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$h'(x) = (2x\ell n x - x^2 + 1)' = 2\ell n x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2x = 2(\ell n x + 1 - x), \quad x \in (0,+\infty)$$

Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι:

$$\ell n x < x-1 \Leftrightarrow \ell n x - x + 1 < 0,$$

οπότε:

$$h'(x) = 2(\ell n x + 1 - x) < 0, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

και η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Επομένως έχουμε:

- Αν $0 < x < 1 \Rightarrow h(x) > h(1) = 0$. Επιπλέον είναι $x(x-1)^3 < 0$ και από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f''(x) < 0$
- Αν $x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1) = 0$. Επιπλέον είναι $x(x-1)^3 > 0$ και από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f''(x) < 0$

Άρα $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ και από το ερώτημα (δ) έχουμε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,+\infty)$.

στ) Έστω τυχαίο $x > 1$, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1, x]$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Είναι:

$$1 < \xi < x \xrightarrow{f' \downarrow (0,+\infty)} f'(1) > f'(\xi) > f'(x) \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > f'(x) \xrightarrow[\substack{x-1>0 \\ f(1)=1}]{x-1>0}$$

$$\frac{x-1}{2} > f(x) - f(1) > (x-1)f'(x) \Rightarrow \frac{x-1}{2} > f(x) - 1 > (x-1)f'(x)$$

$$\frac{x-1}{2} + 1 > f(x) > (x-1)f'(x) + 1 \Rightarrow (x-1)f'(x) + 1 < f(x) < \frac{x+1}{2}$$

ΘΕΜΑ 18ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $2f(x) > x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) + (4-x)f(x) = 12-x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$.
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.
- γ) Θεωρούμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$, $\beta = 1$ και ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{A}) = (1, +\infty)$.

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 12} \frac{f(x) - x + 4}{x - 12}$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή καθεμία από τις συναρτήσεις $f^2(x)$, $4-x$, $f(x)$ και $12-x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (f^2(x) + (4-x)f(x))' &= (12-x)' \Rightarrow \\ \Rightarrow 2f(x)f'(x) - f(x) + (4-x)f'(x) &= -1 \quad (1) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ από υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned} f^2(0) + 4f(0) &= 12 \Leftrightarrow f^2(0) + 4f(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f(0) - 2) \cdot (f(0) - 6) &= 0 \Leftrightarrow f(0) = 2 \text{ ή } f(0) = -6 \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $2f(x) > x+1$, οπότε για $x = 0$ προκύπτει $2f(0) > 1 \Leftrightarrow f(0) > \frac{1}{2}$

Άρα $f(0) = 2$, οπότε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , έχει με τον άξονα $y'y$ κοινό σημείο το $A(0, 2)$.

Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} 2f(0)f'(0) - f(0) + 4f'(0) &= -1 \quad \overset{f(0)=2}{\Rightarrow} \\ 4f'(0) - 2 + 4f'(0) &= -1 \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 2)$ είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon: y - f(0) &= f'(0)(x - 0) \Rightarrow \\ \varepsilon: y - 2 &= \frac{1}{8}(x - 0) \Rightarrow \varepsilon: y = \frac{1}{8}x + 2 \end{aligned}$$

β) Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι $f'(x_0) = 0$ (2)

Από τη σχέση (1) για $x = x_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 2f(x_0)f'(x_0) - f(x_0) + (4 - x_0)f'(x_0) &= -1 \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \\ 2f(x_0) \cdot 0 - f(x_0) + (4 - x_0) \cdot 0 &= -1 \Rightarrow f(x_0) = 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Από υπόθεση για $x = x_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f^2(x_0) + (4 - x_0)f(x_0) &= 12 - x_0 \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \\ 1 + (4 - x_0) \cdot 1 &= 12 - x_0 \Rightarrow 5 = 12, \text{ που είναι άτοπο.} \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Έχουμε λοιπόν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = \frac{1}{8} > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Από υπόθεση είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$

• Για κάθε x κοντά στο $-\infty$ ($x < 0$) από υπόθεση είναι:

$$\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{4-x}{x} \cdot \frac{f(x)}{x} = \frac{12-x}{x^2} \quad (4)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0, \text{ οπότε από τη}$$

σχέση (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right)^2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12-x}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda^2 + \lambda(-1) &= 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1 \quad (5) \end{aligned}$$

Όμως για κάθε x κοντά στο $-\infty$ ($x < 0$) είναι:

$$2f(x) > x + 1 \Leftrightarrow 2 \frac{f(x)}{x} < 1 + \frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 \frac{f(x)}{x} \right) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow 2\lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι $\lambda = 0$

• Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \quad \text{και} \quad \lambda = 0,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta \quad (7)$$

Για κάθε x κοντά στο $-\infty$ ($x < 0$) από υπόθεση είναι:

$$\begin{aligned} f^2(x) + (4-x)f(x) &= 12-x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (4-x)f(x) &= 12-x-f^2(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{12-x}{4-x} - f^2(x) \cdot \frac{1}{4-x} \quad (8) \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12-x}{4-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$, οπότε από τις σχέσεις (7)

και (8) έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12-x}{4-x} - \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4-x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta &= 1 - \beta^2 \cdot 0 \Rightarrow \beta = 1 \end{aligned}$$

• Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Από τη σχέση (7) έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta = 1$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$2f(x) > x + 1 \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{με} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) = +\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Άρα:

$$f(A) = (1, +\infty)$$

δ) Για $x = 12$ από υπόθεση είναι:

$$f^2(12) - 8f(12) = 0 \Leftrightarrow f(12) \cdot (f(12) - 8) = 0 \Leftrightarrow f(12) = 0 \quad \text{ή} \quad f(12) = 8$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $2f(x) > x + 1$, οπότε για $x = 12$ προκύπτει $2f(12) > 13 \Leftrightarrow f(12) > \frac{13}{2}$

Άρα:

$$f(12) = 8$$

Για $x = 12$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} 2f(12)f'(12) - f(12) - 8f'(12) &= -1 \quad \Leftrightarrow \quad f(12)=8 \\ \Leftrightarrow 16f'(12) - 8 - 8f'(12) &= -1 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8f'(12) &= 7 \quad \Leftrightarrow f'(12) = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 12} \frac{f(x) - x + 4}{x - 12} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 12} \frac{(f(x) - x + 4)'}{(x - 12)'} = \\ \lim_{x \rightarrow 12} (f'(x) - 1) &= f'(12) - 1 = \frac{7}{8} - 1 = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 19ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{(x^2+1)h} - 1)(f(x) - f(x+2h))}{4h^2} = xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης.

γ) Σημείο $M(x, f(x))$, $x > 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Αν N είναι το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ και K, Λ οι προβολές των N, M αντιστοίχως στον άξονα $x'x$, να προσδιορίσετε τις κορυφές K, Λ, M, N ώστε το εμβαδόν του τετράπλευρου $K\Lambda MN$ να γίνεται μέγιστο.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{(x^2 + 1)(e^x - 1)}{x^2 - x + 1} = x$$

ε) Να υπολογίσετε:

i) Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 1)f(x)}{2\ln x + 3}$

ii) Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)f(x)}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2+1)h} - 1}{h} = (x^2 + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2+1)h} - 1}{(x^2 + 1)h} = x^2 + 1$$

αφού

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2+1)h} - 1}{(x^2 + 1)h} \stackrel{(x^2+1)h=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \frac{d(e^u)}{du} \Big|_{u=0} = 1$$

και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+2h)}{2h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} \stackrel{2h=u}{=} -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = -f'(x)$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{(x^2+1)h} - 1)(f(x) - f(x+2h))}{4h^2} &= xf'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2+1)h} - 1}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+2h)}{2h} &= xf'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2+1)f'(x) &= xf'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2+1)f'(x) + (x^2+1)'f(x) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2+1)f(x) &= c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Επιπλέον είναι:

$$f(0) = 1$$

Οπότε:

$$c = (0+1)f(0) \Rightarrow c = 1$$

Επομένως:

$$(x^2+1)f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ με μέγιστη τιμή $f(0) = 1$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{8x^2 - 2x^2 - 2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \bullet f''(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x > \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμψής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$		
$f''(x)$		+	0	-	0	+
f(x)		∪		∩		∪
		Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) < 0$ στο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
- ♦ Η συνάρτηση f'' μηδενίζεται στο $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, δηλαδή το $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- ♦ Η συνάρτηση f'' μηδενίζεται στο $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, δηλαδή το $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

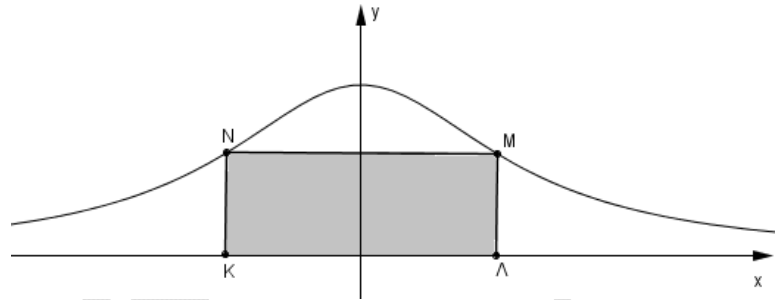
Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f τόσο στο $-\infty$ όσο και στο $+\infty$

γ) Αν $M(x, f(x))$ τυχαίο σημείο της C_f με $x > 0$, τότε το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $N(-x, f(x))$ και επειδή η f είναι άρτια, ισχύει $f(x) = f(-x)$, οπότε $N(-x, f(-x))$, δηλαδή το σημείο N είναι πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Το τετράπλευρο $KLMN$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και τις γωνίες του ορθές, άρα είναι ορθογώνιο.

Αν $E(x)$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου, τότε έχουμε:

$$E(x) = (KL) \cdot (LM) = 2x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x > 0$$

Για κάθε $x > 0$ η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη με:

$$E'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad E'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 1 \\ \bullet \quad E'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης E είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$E'(x)$	+	0	−
$E(x)$		1	

Μέγιστο

Η συνάρτηση E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου $KLMN$ γίνεται μέγιστο όταν $x = 1$, οπότε οι ζητούμενες κορυφές του ορθογωνίου είναι τα σημεία $K(-1, 0)$, $L(1, 0)$, $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ και $N\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

δ) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+1)(e^x-1)}{x^2-x+1} &= x \Leftrightarrow (x^2+1)e^x - x^2 - 1 = x^3 - x^2 + x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2+1)e^x = x(x^2+1) + 1 \Leftrightarrow e^x = x + \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^x - x = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = e^x - x, \quad (1) \end{aligned}$$

Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επιπλέον, από την γνωστή ανισοισότητα $e^x \geq x + 1$ που επίσης ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι $e^x - x \geq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow (f(x) = 1 \text{ και } e^x - x = 1) \Leftrightarrow x = 0$$

ε) i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2\eta\mu x + 3 \leq 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\eta\mu x + 3} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{(e^x + 1)f(x)}{2\eta\mu x + 3} \geq \frac{1}{5} \cdot \frac{e^x + 1}{x^2 + 1} \quad (2)$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 + 1} \stackrel{+\infty}{=} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 1)'}{(x^2 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{+\infty}{=} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{e^x + 1}{x^2 + 1} \right) = +\infty$$

Οπότε λόγω της σχέσης (2), συμπεραίνουμε ότι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 1)f(x)}{2\eta\mu x + 3} = +\infty$

ii) Έστω I το ολοκλήρωμα του οποίου ζητείται ο υπολογισμός, δηλαδή:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)f(x)} = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} dx$$

Αν θέσουμε $x = -u$, τότε έχουμε $dx = -du$, οπότε είναι $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ και

$$I = - \int_1^{-1} \frac{u^2 + 1}{e^{-u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{(u^2 + 1)e^u}{e^u + 1} du$$

Οπότε:

$$2I = I + I = \int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1)}{e^x + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{8}{3}$$

Άρα:

$$I = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ 20ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας και κυρτής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή παράγωγο.

Η γραφική παράσταση C_f της f έχει ασύμπτωτες τις ευθείες: $\varepsilon_1: y = 0$ στο $-\infty$ και την $\varepsilon_2: y = 2x - 3$ στο $+\infty$.

Η ευθεία ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

α) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots$
 iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$ iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \dots$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f^2(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{f(x) - 2x - 1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} , θεωρώντας ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

ε) Να αποδείξετε ότι:

- i) Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση $y = x + 1$ και να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2
 ii) $\int_0^5 f(x) dx > 18$.

ΛΥΣΗ

α) i) Η ευθεία $\varepsilon_1: y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

ii) Η ευθεία $\varepsilon_2: y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

iii) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = +\infty$

iv) Η ευθεία $\varepsilon_2: y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = -3$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

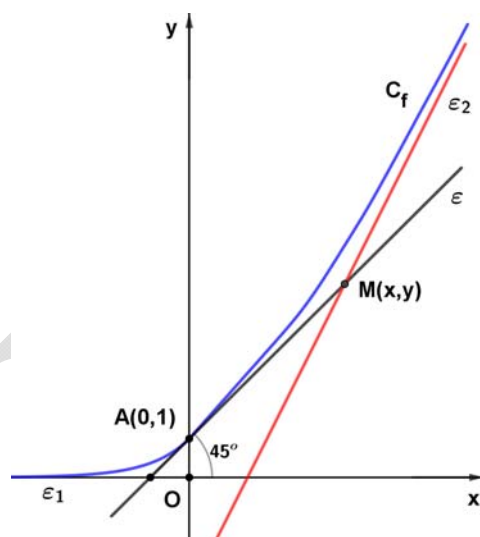
$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Οπότε:

$$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$$



γ) i) Θέτουμε $u = \frac{1}{f(x)} > 0$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f^2(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{u^2} \cdot \eta\mu u \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{u} \cdot \frac{\eta\mu u}{u} \right) = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\bullet \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{u} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu u}{u} \right) = 1$$

ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln f(x)) = \ln 1 = 0$$

Επειδή η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x)]}{f(x) - 2x - 1} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln[f(x)])'}{(f(x) - 2x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{f'(x) - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)(f'(x) - 2)} = \frac{f'(0)}{f(0)(f'(0) - 2)} = \frac{1}{1 \cdot (1 - 2)} = -1, \text{ αφού } f'(0) = \tan 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

δ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως η f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f ως προς την ευθεία $y = x$. Άρα αντιμεταθέτοντας τις μεταβλητές x, y στις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1 : y = 0$ και $\varepsilon_2 : y = 2x - 3$, οι ασύμπτωτες της $C_{f^{-1}}$ είναι οι ευθείες $\zeta_1 : x = 0$ και $\zeta_2 : x = 2y - 3 \Leftrightarrow \zeta_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, οι οποίες είναι συμμετρικές των ευθειών ε_1 και ε_2 , αντιστοίχως, ως προς την ευθεία $y = x$.

ε) i) Είναι:

$$f(0) = 1 \text{ και } f'(0) = 1$$

οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, 1)$ έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = x + 1.$$

Έστω $M(x, y)$ το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon : y = x + 1$ και $\varepsilon_2 : y = 2x - 3$.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου M λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

Άρα $M(4, 5)$

ii) Είναι:

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx \quad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) \geq x + 1 \quad (\text{το «ίσον» ισχύει μόνο για } x = 0)$$

Οπότε

$$\int_0^4 f(x) dx > \int_0^4 (x + 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^4 = 12 \quad (2)$$

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f βρίσκεται «πάνω» από την ασύμπτωτή της $\varepsilon_2: y = 2x - 3$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) > 2x - 3$$

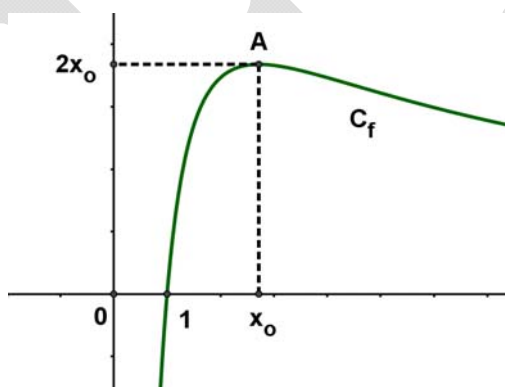
Επομένως έχουμε:

$$\int_4^5 f(x) dx > \int_4^5 (2x - 3) dx = \left[x^2 - 3x \right]_4^5 = (5^2 - 3 \cdot 5) - (4^2 - 3 \cdot 4) = 6 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx &> 12 + 6 = 18 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \int_0^5 f(x) dx &> 18 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 21ο



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
- Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x_0 με τιμή $f(x_0) = 2x_0$.
- $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, x_0]$.
- Έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 0$.

α) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 2x}{(x - x_0)f(x)}$$

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $0 < \frac{2x_0}{x_0 - 1} < f'(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν $E(\Omega)$ το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = x_0$, να αποδείξετε ότι:

$$E(\Omega) < 2x_0(x_0 - 1)$$

ΛΥΣΗ

α) i) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και συνεχής, οπότε είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0$$

Για $0 < x < 1$ έχουμε $f(x) < 0$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Για $1 < x < x_0$ έχουμε $f(x) > 0$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)},$$

οπότε δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

ii) Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$ είναι της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$

Διαιρώντας με $x \neq 0$ τους όρους του κλάσματος έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x + f(x)}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{f(x)}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}} \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 0$.

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (2)$$

Για το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right) = 1 \quad (3), \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{f(x)}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1 + 0}{1} \stackrel{(3)}{=} 1$$

iii) Για x κοντά x_0 έχουμε:

$$\frac{f(x) - 2x}{(x - x_0)f(x)} = \left(\frac{f(x) - 2x_0}{x - x_0} - \frac{2(x - x_0)}{x - x_0} \right) \cdot \frac{1}{f(x)} = \left(\frac{f(x) - 2x_0}{x - x_0} - 2 \right) \cdot \frac{1}{f(x)}$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0,$$

αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (0, +\infty)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)} = \frac{1}{2x_0},$$

αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in (0, +\infty)$ και $f(x_0) = 2x_0 \neq 0$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 2x}{(x - x_0)f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - 2x_0}{x - x_0} - 2 \right) \cdot \frac{1}{f(x)} = (f'(x_0) - 2) \frac{1}{2x_0} \stackrel{\text{Fermat}}{=} \frac{1}{f'(x_0)=0} = -\frac{1}{x_0}$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in (0, +\infty)$, οπότε από το Θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x_0)$, διότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $[1, x_0] \subseteq (0, +\infty)$. Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1, x_0]$. Δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0)}{x_0 - 1} \stackrel{f(x_0)=2x_0}{=} f'(\xi) = \frac{2x_0}{x_0 - 1}$$

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, x_0]$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, x_0) \subseteq (0, x_0]$.

Επειδή $1 < \xi < x_0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, έχουμε:

$$f'(1) > f'(\xi) > f'(x_0) \stackrel{\text{Fermat}}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{2x_0}{x_0 - 1} < f'(1) \quad (4)$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $x_1 \in (1, x_0)$ είναι:

$$(\varepsilon) : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχουμε:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(0 - x_1) \Leftrightarrow x_1 f'(x_1) - f(x_1) = 0 \quad (5)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (1, x_0)$ για το οποίο ισχύει η σχέση (5).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x f'(x) - f(x)$, η οποία είναι ορισμένη και συνεχή στο $[1, x_0]$

Έχουμε:

- $\varphi(1) = f'(1) - f(1) = f'(1) > 0$, λόγω της σχέσης (4)
- $\varphi(x_0) = x_0 f'(x_0) - f(x_0) \stackrel{\text{Fermat}}{=}_{f'(x_0)=0} -2x_0 < 0$, αφού $x_0 > 0$

Επομένως η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει η σχέση (5)

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, x_0]$ με:

$$\varphi'(x) = f'(x) + x f''(x) - f'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = x f''(x)$$

Για κάθε $x \in (1, x_0) \subseteq (0, x_0]$ είναι $\varphi'(x) = x f''(x) < 0$ και η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $[1, x_0]$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, x_0]$

Επομένως το $x_1 \in (1, x_0)$ για το οποίο ικανοποιείται η σχέση (5) είναι μοναδικό.

δ) Από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στο διάστημα $[1, x_0]$ παρατηρούμε ότι:

$$f(1) \leq f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2x_0, \text{ για κάθε } x \in [1, x_0]$$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ και $x = x_0$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \int_1^{x_0} f(x) dx &< \int_1^{x_0} 2x_0 dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_1^{x_0} f(x) dx &< 2x_0(x_0 - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_1^{x_0} f(x) dx &< 2x_0(x_0 - 1) \Rightarrow \end{aligned}$$

Είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^{x_0} f(x) dx$$

Οπότε:

$$E(\Omega) < 2x_0(x_0 - 1)$$

Σημειώσεις:

- I)** Από το σχήμα που δόθηκε, μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι, το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από τις ευθείες $x = 1$, $x = x_0$ και $y = 0$, $y = 2x_0$
- II)** Το όριο του ερωτήματος **α) ii)** μπορεί να υπολογιστεί και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ορίων, αφού εύκολα προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} + \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \right)$$

και τα επιμέρους όρια υπολογίζονται εύκολα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \dots = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \dots = 0$$

ΘΕΜΑ 22ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(x) \geq x \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 1$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$

Αν επιπλέον ισχύει $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1$, τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \ln x$ για κάθε $x \in [1, e]$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο διάστημα $[1, e]$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} διέρχεται από το

σημείο $A\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right)$ και στη συνέχεια θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση

να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της A

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1, e]$ και στη συνέχεια να

αποδείξετε ότι $\ln \frac{e+1}{2} < \frac{e}{e+1}$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) \geq x \ln x \Leftrightarrow f(x) - x \ln x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$$

Επομένως η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = f'(x) - \ln x - 1$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ με $g'(1) = f'(1) - 1$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα ισχύει:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 1$$

β) 1^{ος} τρόπος:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα για $x \neq 1$ είναι:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Όμως $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x}$, άρα και στο $x_0 = 1$ με $h'(1) = 1$

Για κάθε $x \neq 1$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \quad (2)$$

Για κάθε $x \neq 1$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{1}{1} = 1$$

2^{ος} τρόπος:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, οπότε είναι και συνεχής. Επομένως η συνάρτηση $\frac{f(x)}{\ln x}$ θα είναι συνεχής στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων. Άρα το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$, υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) \geq x \ln x$, οπότε:

- Για $x > 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)}{\ln x} \geq x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{\ln x} \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{\ln x} \geq 1$$

- Για $0 < x < 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)}{\ln x} \leq x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{\ln x} \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{\ln x} \leq 1$$

Επειδή υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$ και είναι πραγματικός αριθμός τα πλευρικά όρια θα είναι ίσα, άρα θα

ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$.

γ) 1^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x \in [1, e] \subseteq (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) \geq x \ln x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \ln x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} - \ln x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0 \quad (3)$$

όπου $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x} - \ln x$, $x \in [1, e]$

Είναι:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e (x)' \ln x dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx = e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = \\ &= e \cdot 1 - 1 \cdot 0 - \int_1^e 1 dx = e - 0 - 1(e - 1) = e - e + 1 = 1 \quad (4) \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\int_1^e \varphi(x) dx = \int_1^e \left(\frac{f(x)}{x} - \ln x \right) dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx - \int_1^e \ln x dx \stackrel{(4)}{=} 1 - 1 = 0$$

Παρατηρούμε ότι:

- $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x} - \ln x \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και
- $\int_1^e \varphi(x) dx = 0$ (5)

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, e]$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) \neq 0$, τότε $\varphi(x_0) > 0$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, αλλά η συνεχής συνάρτηση φ δεν

είναι παντού μηδέν, οπότε $\int_1^e \varphi(x) dx > 0$, που είναι άτοπο λόγω της σχέσης (5)

Επομένως για κάθε $x \in [1, e]$ είναι:

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x \Leftrightarrow f(x) = x \ln x$$

2^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x \in [1, e] \subseteq (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) \geq x \ln x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \ln x \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \geq \int_1^e \ln x dx \quad (3\alpha)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $f(x) = x \ln x$ για κάθε $x \in [1, e]$

Είναι:

$$\int_1^e \ln x dx = \dots = 1 \quad (4\alpha)$$

Δηλαδή η σχέση (3α) ισχύει ως ισότητα, οπότε αναγκαστικά, $f(x) = x \ln x$ για κάθε $x \in [1, e]$

i) Για κάθε $x \in [1, e]$ είναι:

$$f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + 1 > 0,$$

αφού για $1 \leq x \leq e \Rightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$, άρα $1 \leq \ln x + 1 \leq 2$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, e]$, άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, e]$ έχουμε:

$$A_{f^{-1}} = f(A) = [f(1), f(e)] = [0, e]$$

ii) Το σημείο $A \left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e} \right) \in C_{f^{-1}}$ αν και μόνο αν το συμμετρικό του ως προς άξονα συμμετρίας

την ευθεία $y = x$, δηλαδή το σημείο $B \left(\sqrt{e}, \frac{\sqrt{e}}{2} \right) \in C_f$

Είναι:

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} \ln \sqrt{e} = \sqrt{e} \cdot \frac{1}{2} \ln e = \frac{\sqrt{e}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

Άρα το σημείο $B\left(\sqrt{e}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right) \in C_f$, οπότε το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right) \in C_{f^{-1}}$

1^{ος} τρόπος:

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $[0, e]$, άρα η

εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right)$ είναι:

$$\varepsilon_A : y - f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$$

Είναι:

- $f(\sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \sqrt{e}$
- Για κάθε $x \in [0, e]$ είναι $f(f^{-1}(x)) = x$ (6)

Η συνάρτηση $f \circ f^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, e]$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (6) έχουμε:

$$(f(f^{-1}(x)))' = (x)' \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \quad (7)$$

Για $x = \frac{\sqrt{e}}{2}$ από τη σχέση (7) έχουμε:

$$f'\left(f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)\right) \cdot (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = 1 \quad \xrightarrow{f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \sqrt{e}} \Rightarrow f'(\sqrt{e}) \cdot (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$(\ln \sqrt{e} + 1) \cdot (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

Επομένως:

$$\varepsilon_A : y - \sqrt{e} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) \Rightarrow y - \sqrt{e} = \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{e}}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2\sqrt{e}}{3}$$

2^{ος} τρόπος:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της $1^{\text{ης}}-3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων, δηλαδή την ευθεία $y = x$

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \sqrt{e}$$

Οπότε το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right) \in C_{f^{-1}}$ και το συμμετρικό του ως προς άξονα συμμετρίας την

ευθεία $y = x$, δηλαδή το σημείο $B\left(\sqrt{e}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right) \in C_f$

Βρίσκουμε την εφαπτομένη ε_B της C_f στο σημείο της $B\left(\sqrt{e}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

$$\varepsilon_B : y - f(\sqrt{e}) = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y - \frac{\sqrt{e}}{2} = (\ln \sqrt{e} + 1) \cdot (x - \sqrt{e}) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y - \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{3}{2} \cdot (x - \sqrt{e}) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y - \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{e}}{2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y = \frac{3}{2}x - \sqrt{e}$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη ε_A της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right)$ είναι συμμετρική της ε_B ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$.

Λύνουμε την εξίσωση $\varepsilon_B : y = \frac{3}{2}x - \sqrt{e}$ ως προς x στο διάστημα $[1, e]$.

Έχουμε:

$$y = \frac{3}{2}x - \sqrt{e} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = y + \sqrt{e} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y + \frac{2\sqrt{e}}{3}$$

Αντιμεταθέτουμε τις μεταβλητές x και y , οπότε είναι $y = \frac{2}{3}x + \frac{2\sqrt{e}}{3}$

Άρα η εφαπτομένη ε_A της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right)$ είναι $y = \frac{2}{3}x + \frac{2\sqrt{e}}{3}$

- iii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, e]$ και για κάθε $x \in (1, e)$ είναι $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1, e]$.

Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα

διαστήματα $\left[1, \frac{e+1}{2}\right]$ και $\left[\frac{e+1}{2}, e\right]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

$$\bullet \xi_1 \in \left(1, \frac{e+1}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{e+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{e+1}{2} - 1} = \frac{f\left(\frac{e+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{e-1}{2}}$$

$$\bullet \xi_2 \in \left(\frac{e+1}{2}, e\right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f\left(\frac{e+1}{2}\right)}{e - \frac{e+1}{2}} = \frac{f(e) - f\left(\frac{e+1}{2}\right)}{\frac{e-1}{2}}$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1, e]$, επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

$$1 < \xi_1 < \frac{e+1}{2} < \xi_2 < e \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f\left(\frac{e+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{e-1}{2}} < \frac{f(e) - f\left(\frac{e+1}{2}\right)}{\frac{e-1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{e+1}{2}\right) - f(1) < f(e) - f\left(\frac{e+1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f\left(\frac{e+1}{2}\right) < f(1) + f(e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{e+1}{2} \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) < 1 \cdot \ln 1 + e \ln e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e+1) \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) < e \Rightarrow \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) < \frac{e}{e+1}$$

Σημείωση:

Στα ερωτήματα (γ) i) και (γ) ii), γράφοντας f^{-1} εννοούμε την αντίστροφη της συνάρτησης $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \ln x$, («περιορισμός» της $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ στο διάστημα $[1, e]$).

ΘΕΜΑ 23ο

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(e) = g(1) = 1$, $f(e^{-1}) = -1$ και $g(e) = e^{-1}$, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

- $f'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $xf(x)f'(x) + x^2g^2(x) + x^2f(x)g'(x) = 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x)$, $x \in (0, +\infty)$, τότε:

β) i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε:

i) Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h .

ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν E του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_h της συνάρτησης h , την εφαπτομένη της ε και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

ε) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

ΛΥΣΗ

α) Από τις σχέσεις (1) και (2) για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$xf(x)g(x) + x^2 f'(x)g(x) + x^2 f(x)g'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$f(x)g(x) + xf'(x)g(x) + xf(x)g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$(xf(x)g(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow xf(x)g(x) = \ln x + c$$

Για $x = e$ έχουμε:

$$ef(e)g(e) = \ln e + c \Leftrightarrow e \cdot 1 \cdot e^{-1} = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως:

$$xf(x)g(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x)g(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

β) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$h'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Είναι:

$$\circ \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\circ \quad h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	0	e	$+\infty$	
$h'(x)$		+	0	–
$h(x)$			$h(e)$	

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0, e]$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[e, +\infty)$ και $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (e, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$
- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$ με μέγιστη τιμή $h(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

ii) Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$, οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$h(x) \leq h(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} e \ln x \leq x \ln e \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow x^e \leq e^x$$

γ) i) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{-\infty}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = -\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h .

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h .

- ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, άρα ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h σε κάθε σημείο της. Αν $A(x_0, h(x_0))$ το σημείο επαφής και (ε) η εφαπτομένη της C_h στο A , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y - h(x_0) = h'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \cdot (x - x_0) \quad (3).$$

Όμως το $O(0, 0) \in (\varepsilon)$, αν και μόνο αν, η εξίσωση (3) επαληθεύεται για $x = 0$ και $y = 0$.

Έτσι έχουμε:

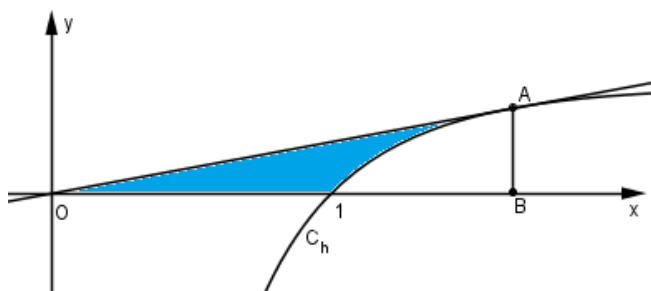
$$\begin{aligned} 0 - \frac{\ln x_0}{x_0} &= \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \cdot (0 - x_0) \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \cdot x_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x_0 = 1 - \ln x_0 \Leftrightarrow 2 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{e} \end{aligned}$$

Για $x_0 = \sqrt{e}$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_h στο σημείο $A(\sqrt{e}, h(\sqrt{e}))$ είναι:

$$\begin{aligned} (\varepsilon): y - h(\sqrt{e}) &= h'(\sqrt{e}) \cdot (x - \sqrt{e}) \Rightarrow y - \frac{\ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}} = \frac{1 - \ln \sqrt{e}}{e} \cdot (x - \sqrt{e}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y - \frac{\frac{1}{2} \cdot \ln e}{\sqrt{e}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \ln e}{e} \cdot (x - \sqrt{e}) \Rightarrow y - \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{2e} \cdot (x - \sqrt{e}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y - \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{2e} \cdot x - \frac{1}{2e} \cdot \sqrt{e} \Rightarrow y - \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{2e} \cdot x - \frac{1}{2\sqrt{e}} \Rightarrow y = \frac{1}{2e} \cdot x \end{aligned}$$

- δ) Το εμβαδόν E του επιπέδου χωρίου, το οποίο ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_h της συνάρτησης h , την εφαπτομένη της ε και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$, είναι:

$$E = (OAB) - \int_1^{\sqrt{e}} h(x) dx$$



Είναι:

$$\begin{aligned} \circ (OAB) &= \frac{1}{2} \cdot (OB) \cdot (BA) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e} \cdot h(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{4} \\ \circ \int_1^{\sqrt{e}} h(x) dx &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \ln x \cdot (\ln x)' dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{\ln^2 \sqrt{e}}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \\ &= \frac{(\ln \sqrt{e})^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \ln e \right)^2}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$E = (OAB) - \int_1^{\sqrt{e}} h(x) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

ε) ♦ Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \frac{\ln x}{x} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x)f'(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x)f'(x) &= \ln x \cdot (\ln x)' \Rightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2} \right)' = \left(\frac{\ln^2 x}{2} \right)' \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} &= \frac{\ln^2 x}{2} + c \Rightarrow f^2(x) = \ln^2 x + 2c \end{aligned}$$

Για $x = e$ έχουμε:

$$f^2(e) = \ln^2 e + 2c \Leftrightarrow 1 = 1 + 2c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως:

$$f^2(x) = \ln^2 x, \quad x \in (0, +\infty)$$

Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $(0, +\infty)$ μοναδική ρίζα την $x = 1$

- Η συνάρτηση f στο $(0, 1)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε στο διάστημα αυτό διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επομένως για κάθε $x \in (0, 1)$:

$$\text{ή θα είναι } f(x) > 0 \text{ ή θα είναι } f(x) < 0$$

Επειδή $f(e^{-1}) = -1 < 0$ θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$

Οπότε έχουμε:

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, 1)$$

- Η συνάρτηση f στο $(1, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε στο διάστημα αυτό διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επομένως για κάθε $x \in (1, +\infty)$:

ή θα είναι $f(x) > 0$ ή θα είναι $f(x) < 0$

Επειδή $f(e) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Οπότε έχουμε:

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (1, +\infty)$$

Επειδή $f(1) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty) \quad (4)$$

♦ Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) = f'(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$